
WdM - lista przedkolokwialna 2

Kolokwium odbędzie się w trakcie ćwiczeń 26 kwietnia i potrwa 60 minut. Obowiązuje materiał z wykładów (list) 1-8. Po kolokwium odbędzie się omawianie zadań (moja grupa oraz grupa pana Jagielli są proszone o przejście na omawianie zadań do sali WS).

Zad. 1 Zdefiniuj (wzorem) dowolną funkcję

$$f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}).$$

Spróbuj zdefiniować kilka takich funkcji. (Uwaga: funkcja nie musi być „na” ani różnowartościowa.)

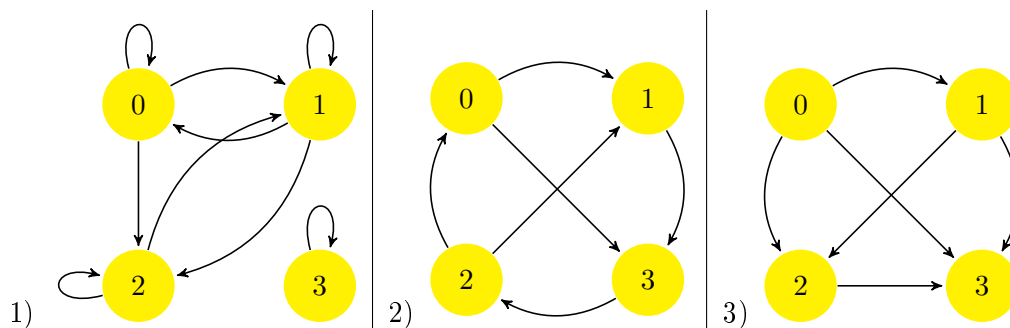
Zad. 2 Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $\sin(x) < \sqrt{3}/2$ za pomocą sumy uogólnionej odpowiednich zbiorów.

Zad. 3 Przemyśl, co ma ze sobą wspólnego funkcja zdaniowa dwóch zmiennych o zakresie zmienności X z relacją na zbiorze X .

Zad. 4 Niech funkcja $f: X \rightarrow Y$ świadczy, że relacja \sim jest relacją równoważności na X . Zakładamy, że funkcja f jest „na”.

- Czym jest \sim , jeżeli funkcja f jest różnowartościowa?
- Ile elementów ma X/\sim , jeżeli Y ma trzy elementy?
- Wykaż, że $[x]_{\sim} = f^{-1}[\{y\}]$ dla pewnego $y \in Y$. Jak ten y jest związany z x ?
- Wykaż, że $X/\sim = \{f^{-1}[\{y\}]: y \in Y\}$.

Zad. 5 Rozważmy relację R na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ o poniższym diagramie.



W każdym z powyższych przypadków sprawdź prawdziwość następujących zdań:

- $\exists x, y, z \ xRy \wedge xRz \wedge y \neq z$,
- $\exists x \forall y \ ((x \neq y \wedge xRy) \implies (\exists z(z \neq x \wedge yRz)))$,
- $\{\langle x, y \rangle : xRy\} \subseteq \{\langle x, y \rangle : yRx\}$,
- $\{\langle x, y \rangle : xRy\} \cap \{\langle x, y \rangle : yRx\} = \emptyset$,
- $\forall x \exists y \ x < y \wedge \neg(xRy)$.

W każdym przypadku wypisz wszystkie liczby x takie, że

$$\exists y xRy \wedge \forall z((y \neq z \wedge xRz) \implies yRz).$$

Czy którąś z powyższych relacji potrafisz zapisać prostym wzorem?

Zad. 6 Na X mamy daną relację równoważności \sim . Pokaż, że następujące warunki są równoważne dla każdego $x, y \in X$:

- $x \sim y$,
- $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$,
- $x \in [y]_{\sim}$.

Zad. 7 Niech X będzie zbiorem punktów na Kuli Ziemskiej bez biegunów. Poniżej podano partycje zbioru X . W każdym wypadku podaj relację równoważności, której zbiór ilorazowy jest tą partycją:

- a) zbiór równoleżników,
- b) zbiór południków,
- c) zbiór poziomicy.

Zad. 8 Niech X będzie zbiorem wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Poniżej podano relacje równoważności na X . W każdym wypadku podaj funkcję świadczącą, że to jest relacja równoważności, znajdź klasę abstrakcji wielomianu $2X^2 + 3X - 1$ i znajdź zbiór ilorazowy.

- a) $V(X) \sim W(X) \iff$ stopień $V(X)$ jest równy stopniowi $W(X)$,
- b) $V(X) \sim W(X) \iff W(0) = V(0)$,
- c) $V(X) \sim W(X) \iff W(0) = V(0)$ i stopień $V(X)$ jest równy stopniowi $W(X)$.

Zad. 9 Niech \mathbb{P} będzie zbiorem liczb pierwszych. Na \mathbb{N}^+ rozważamy relację równoważności

$$n \sim m \iff \forall p \in \mathbb{P}(p|n \iff p|m).$$

- a) Czy $[10]_{\sim} \subseteq [15]_{\sim}$?
- b) Wyznacz $[6]_{\sim}$.
- c) Ile jest skończonych klas abstrakcji relacji \sim ?

Parę ogólnych uwag.

- a) Upewnij się, że znasz (i rozumiesz) wszystkie definicje, które pojawiły się na wykładzie; zwłaszcza te często używane.
- b) Upewnij się, że potrafisz zrobić zadania z list 5-8. Upewnianie się nie powinno polegać na zerknięciu do rozwiązania, lecz na próbie ich ponownego rozwiązania.
- c) Nie koncentruj się na trudniejszych zadaniach, jeśli masz kłopoty z łatwiejszymi. W szczególności odnosi się to do zapisywania w sposób symboliczny zadanych zdań i funkcji zdaniowych. Upewnij się najpierw, że potrafisz zapisać proste funkcje zdaniowe, np. " $x|y$ ", " n jest liczbą pierwszą", itp., a dopiero później atakuj bardziej skomplikowane przykłady.

- d) Jeśli zabierzesz się za rozwiązywanie zadania bez pełnego rozumienia jego treści, najprawdopodobniej zrobisz je źle. Jeśli natomiast dokładnie zrozumiesz treść zadania, to często okazuje się, że rozwiązanie jest bardzo proste. Dlatego warto dokładnie zapoznać się z treścią zadania i zastanowić się, o co właściwie nas w nim proszą.
- e) Jeśli masz dostęp do poprawnego rozwiązania danego zadania, zajrzyj do niego dopiero w ostateczności - po tym, jak zrozumiesz jego treść i podejmiesz parę prób jego zrobienia. Pamiętaj, że czasami łatwiej jest samemu zrobić zadanie niż zrozumieć cudze rozwiązanie (a na pewno jest to o wiele bardziej kształcące).
- f) W wielu wypadkach pomaga wykonanie rysunku pomocniczego (choć, niestety, nie zawsze). Nie bój się rysować.
- g) Jeśli chcesz znaleźć przykład (funkcji, relacji), nie zawsze musi on być zdefiniowany „wzorem”. Funkcje można też zadać diagramem lub wykresem. Relację równoważności możesz zadać partycją. Musisz tylko zadbać, by Twój opis był wystarczająco dokładny.