
WdM - Lista 12 (ćwiczenia 7 VI 2018)

Zad. 1 Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Jakiej mocy może być zbiór $f[\mathbb{N}]$?

Zad. 2 Udowodnij, że rodzina skończonych podzbiorów zbioru przeliczalnego jest przeliczalna.

Zad. 3 Pokaż, że następujące zbiory są przeliczalne:

- a) Zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych.
- b) Zbiór parami rozłącznych trójkątów na płaszczyźnie.
- c) Zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych (wskazówka: użyj zadania 3).
- d) Zbiór liczb algebraicznych (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu).

Które z nich są mocy \aleph_0 ?

Zad. 4 Pokaż, że następujące zbiory są nieprzeliczalne:

- a) Zbiór liczb niewymiernych.
- b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb pierwszych.
- c) Zbiór punktów wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sin(x)$.
- d) Zbiór wszystkich punktów kuli o promieniu 1.
- e) Zbiór wszystkich podzbiorów kuli o promieniu 1.
- f) Zbiór $\{A \subseteq \mathbb{Z}: \mathbb{N} \subseteq A\}$.

Jakiej mocy są powyższe zbiory?

Zad. 5 Wyjaśnij błąd w następującym rozumowaniu: *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy \mathfrak{c} , ponieważ wiemy, że jest on nieprzeliczalny, a z drugiej strony nie może być mocy większej niż \mathfrak{c} .* (Uwaga: choć rozumowanie zawiera lukę, to zbiór liczb niewymiernych naprawdę jest mocy \mathfrak{c}).

Zad. 6 Wykaż, że $\mathcal{P}(A)$ nigdy nie jest mocy \aleph_0 (niezależnie od tego, czym jest zbiór A).

Zad. 7 (*) Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są ciągłe, jest mocy \mathfrak{c} , a zbiór wszystkich, niekoniecznie ciągłych, funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma moc większą niż \mathfrak{c} .

Zad. 8 (*) Pokaż, że istnieje rodzina \mathcal{A} podzbiorów \mathbb{N} taka, że $A \cap B$ jest skończona dla różnych $A, B \in \mathcal{A}$ i \mathcal{A} jest mocy \mathfrak{c} .