

---

**WdM - Lista 2 (1 III 2018)**

---

**Ćw. 1** O liczbie rzeczywistej  $x$  wiadomo, że jeśli  $x \leq 5$ , to  $x > 3$ . Czy stąd wynika, że  $x > 3$ ? Czy wynika, że  $x \leq 5$ ?

**Ćw. 2** O liczbie naturalnej  $n$  wiemy, że

- a) jeśli  $n$  jest podzielne przez 3 lub jest podzielne przez 4, to  $n$  jest podzielne przez 12 *oraz*
- b) jeśli  $n$  jest podzielne przez 3, to nie dzieli się przez 2.

Czy stąd wynika, że  $n$  nie dzieli się przez 3?

**Ćw. 3** O liczbie rzeczywistej  $x$  wiemy, że

- a) jeśli  $x > 0$ , to  $x > 5$ , o ile  $x > 3$  *oraz*
- b) jeśli  $x \leq 5$ , to  $x > 0$ .

Czy stąd wynika, że  $x > 3$ ?

**Ćw. 4** Ile jest (z dokładnością do równoważności) formuł o trzech zmiennych? A ile jest tautologii o trzech zmiennych?

---

**Zad. 5** Niech  $C$  oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważmy zdanie

Jeśli  $C$  jest trapezem, o ile jest rombem, to jeśli  $C$  jest trapezem, to jest kwadratem.

Zapisz powyższe jako formułę logiczną stosując oznaczenia:  $t$ : “ $C$  jest trapezem”,  $r$ : “ $C$  jest rombem”,  $k$ : “ $C$  jest kwadratem”. Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od czworokąta  $C$ ).

- a)  $C$  jest trapezem,
- b)  $C$  nie jest prostokątem,
- c)  $C$  nie jest rombem, lecz jest trapezem.

**Zad. 6** (Zadanie Lewisa Carrolla) O moich dzieciach wiadomo, że

- a) wszyscy moi synowie są szczupli,
- b) wszystkie moje zdrowe dzieci uprawiają sport,
- c) żadne moje dziecko, które jest łakomczuchem, nie jest szczupłe,
- d) żadna moja córka nie uprawia sportu.

Czy z tego wynika, że żadne moje zdrowe dziecko nie jest łakomczuchem?

**Zad. 7** Podaj przykład formuły logicznej  $\alpha(p, q, r)$  o poniższej tabelce wartości logicznych:

$p$	$q$	$r$	$\alpha(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- a) Ile jest takich formuł?  
b) Ile ich jest z dokładnością do równoważności?

**Zad. 8** Ile jest, z dokładnością do równoważności, takich formuł logicznych  $\alpha(p, q)$ , że przy podstawieniu

- $p =$  „17 jest liczbą pierwszą”,
- $q =$  „pada deszcz”

stają się one zdaniami prawdziwymi bez względu na panujące warunki atmosferyczne?

**Zad. 9** Zdefiniuj alternatywę i koniunkcję przy pomocy implikacji i negacji. Następnie przeformułuj odpowiednio zdania *Lubię ciastka i lody* oraz *Na wakacje pojedę nad morze lub w góry*. Zapisz formułę z poprzedniego zadania przy pomocy negacji i implikacji.

**Zad. 10** Zapisz poniższe formuły nie używając znaku negacji, równoważności ani implikacji (w razie potrzeby używając podstawień  $p' = \neg p$ ,  $q' = \neg q$  i  $r' = \neg r$ )

- a)  $\neg(p \vee (\neg q \wedge r))$ ,  
b)  $p \implies (q \implies r)$ ,  
c)  $\neg(p \implies (p \vee r))$ ,  
d)  $p \iff (q \iff r)$ ,  
e)  $(p \implies q) \implies (r \implies p)$ .

**Zad. 11** Znajdź wszystkie formuły (z dokładnością do równoważności)  $\alpha(p, q)$ , dla których  $p \vee q \implies \alpha(p, q)$  jest tautologią. Podobnie dla  $p \wedge q \implies \alpha(p, q)$ .

**Zad. 12** (\*) Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie da się zdefiniować implikacji.

**Zad. 13** (\*) Kreską Sheffera nazywamy spójnik o następującej tabelce wartości logicznych:

$p$	$q$	$p q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Pokaż, że za pomocą kreski Shefera można zdefiniować wszystkie spójniki logiczne.