

---

**WdM - Lista 3** (8 III 2018)

---

**Ćw. 1** Spróbuj *przetłumaczyć* na język rachunku zbiorów różne prawa rachunku zdań (i inne tautologie).

**Ćw. 2** Poćwicz mniej i bardziej formalne dowodzenie równości i inkluzji (np. różnych praw rachunku zbiorów).

**Ćw. 3** Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

**Ćw. 4** Wypisz wszystkie podzbiory zbioru

- a)  $\{1\}$ ,
- b)  $\{1, 2\}$ ,
- c)  $\emptyset$ ,
- d)  $\{\{1, 2\}, 3\}$ ,
- e)  $\{\{1, 2, 3\}\}$ .

Ile podzbiorów będzie miał zbiór  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ? (Nie wypisuj ich!)

A zbiór  $\{\{1, 2, \{1, 2\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}$ ? A zbiór jego podzbiorów?

---

**Zad. 5** Wypisz elementy zbiorów  $A$  i  $B$ . Czy  $A \subseteq B$ ? Czy  $B \subseteq A$ ? Czy  $A = B$ ? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy  $A \in B$  lub  $B \in A$ ?

- a)  $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,
- b)  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ,
- c)  $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ ,  $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$ ,
- d)  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 20\}$ ,
- e)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x = 13\}$ ,

Zakładamy, że  $a$ ,  $b$  i  $c$  nie są zbiorami.

**Zad. 6** Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

- a)  $\{b, c\} = \{b, c, d\}$ ,
- b)  $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$ ,
- c)  $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$ ,
- d)  $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$ ,
- e)  $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$ .

W punktach a)-d) zakładamy, że  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  nie są zbiorami.

**Zad. 7** Zbiory  $A, B, C$  są podzbiórami  $X$ . Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe:

- a)  $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$ ,
- b)  $x \in A \implies x \in B$ ,
- c)  $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$ .

Zdefiniuj te zbiory przy użyciu  $\cup, \cap$ , itd.

**Zad. 8** Zaznacz w sposób *losowy* kontur zbioru  $U$  na diagramie Venna zbiorów  $A, B, C \subseteq X$ . Następnie zapisz za pomocą operacji  $\cup, \cap$  i  $\setminus$  zbiór  $U$ . Napisz funkcję zdaniową  $p$  taką, że  $p(x) \iff x \in U$  przy pomocy funkcji  $x \in A, x \in B, x \in C, x \in X$ .

**Zad. 9** Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia:

- a)  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ,
- b)  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ,
- c)  $(C \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$ .

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby (w szczególności unikające zbędnych formalizmów). Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

**Zad. 10** Dane są pewne zbiory  $A, B, C$  w przestrzeni  $X$ . Wiemy, że  $A \cap B = A \setminus C$ . Czy stąd wynika, że

- a)  $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$ ?
- b)  $A \cap B \cap C = \emptyset$ ?
- c)  $A \cap C = \emptyset$ ?

Odpowiedzi uzasadnij!

**Zad. 11** Udowodnij

- a)  $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$ ,
- b)  $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$ .

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.