

---

**WdM - Lista 5** (ćwiczenia 29 III 2018)

---

**Ćw. 1** Zapisz przy pomocy kwantyfikatorów, używając odpowiednich oznaczeń:

- a) Każdy student, który przyszedł na egzamin, jest przygotowany. (Przykładowe oznaczenia:  $S$  - zbiór studentów,  $e(x)$  -  $x$  przyszedł na egzamin,  $p(x)$  -  $x$  jest przygotowany.)
- b) Na egzamin przyszli tylko przygotowani studenci.
- c) Żaden student, który przyszedł na egzamin, nie był przygotowany.
- d) Na egzamin przyszedł student.
- e) W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszka przynajmniej jedna osoba. (Przykładowe oznaczenia:  $M$  - zbiór mieszkań w tym bloku,  $O$  - zbiór osób,  $m(x, y)$  -  $x$  mieszka w  $y$ .)
- f) W pewnym mieszkaniu w tym bloku nikt nie mieszka.
- g) Każdy człowiek zna człowieka, który nie zna człowieka, który nikogo nie zna. (Przykładowe oznaczenia:  $L$  - zbiór ludzi,  $z(x, y)$  -  $x$  zna  $y$ .)

**Ćw. 2** Określ zasięg kwantyfikatorów, znajdź zmienne wolne. Które z poniższych formuł są zdaniami? Które są zdaniami formalnymi?

- a)  $\forall x (x > 3) \implies y < 5$ ,
- b)  $\forall x \forall y (x > 3 \implies y < 5) \implies \forall x (x \neq 7)$ ,
- c)  $\forall x \forall y (p(x, y) \implies p(x, z))$ ,
- d)  $\exists x \exists y (x \neq y \vee z \leq 0)$ ,
- e)  $\forall x (x + y = z)$ ,
- f)  $\forall x \forall y (p(x, y)) \implies \forall x \forall z q(z, x)$ ,
- g)  $\forall x (x + y = z) \implies \exists z (\exists y (x - y \neq z \wedge \forall z (x \cdot y \geq z)))$

---

**Zad. 3** Zapisz poniższe funkcje zdaniowe symbolicznie, za pomocą kwantyfikatorów. Które z nich są zdaniami? O ciągach zakładamy, że są ciągami liczb rzeczywistych, a o funkcji  $f$ , że jej dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- a) Istnieje liczba naturalna nieparzysta.
- b) Liczba  $x$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- c) Istnieje liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- d)  $n$  jest liczbą pierwszą.
- e) Jeśli liczby rzeczywiste  $x$  i  $y$  są różne, to  $x < y$  lub  $y > x$ .
- f) Liczba  $z$  jest rozwiązaniem równania  $x^3 - x^2 + 1 = 0$ .
- g) Żaden element zbioru  $A$ , który nie jest elementem zbioru  $B$ , nie jest rozwiązaniem równania  $x^2 + x + 1 = 0$ .
- h) Liczba  $\sqrt{2}$  jest niewymierna. (Nie używaj tu symboli  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{I}\mathbb{Q}$ .)
- i) Każdy zbiór  $A$  ma nadzbiór właściwy.
- j) Zbiór  $A$  ma co najmniej dwa elementy.
- k) Zbiór  $A$  ma co najwyżej dwa elementy.

- l) Zbiór  $A$  ma dokładnie trzy elementy.
- m) Ciąg  $(a_n)_n$  jest rosnący.
- n) Ciąg  $(a_n)_n$  ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
- o) Od pewnego miejsca wyrazy ciągu  $(a_n)_n$  są dodatnie.
- p) Ciąg  $(a_n)_n$  ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.
- q) Funkcja  $f$  przyjmuje wartości nieujemne.
- r) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.
- s) Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

**Zad. 4** Zapisz poniższe zdania i funkcje zdaniowe prozą, w języku potocznym.

- a)  $\forall x x \notin A$ ,
- b)  $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in A n \leq x$ ,
- c)  $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} n < m$ ,
- d)  $\forall A (A \neq \emptyset \implies \exists B (B \subseteq A \wedge \exists x x \in B))$ ,
- e)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y = y$ ,
- f)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y = 0$ ,
- g)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0)$ ,
- h)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0 \wedge x \neq y)$ ,
- i)  $\exists n \in \mathbb{N} (\exists k \in \mathbb{N} (n = 2k + 1) \wedge \exists k \in \mathbb{N} (n = 3k))$ .

**Zad. 5** Podaj konkretne funkcje zdaniowe świadczące o tym, że poniższe zdania formalne nie są tautologiami rachunku kwantyfikatorów. Postaraj się znaleźć parę przykładów, szukając zarówno bezpośrednio funkcji zdaniowych (np. o zakresie liczb naturalnych lub rzeczywistych), jak i rysując najpierw odpowiednie wykresy i diagramy funkcji zdaniowych (patrz wykład).

- a)  $\exists x, y p(x, y) \implies \exists x \forall y p(x, y)$ ,
- b)  $\exists x, y p(x, y) \implies \exists x p(x, x)$ ,
- c)  $\forall y \exists x p(x, y) \implies \forall x p(x, x)$ ,
- d)  $\forall x p(x, x) \implies \forall x \forall y p(x, y)$ ,
- e)  $\exists x \forall y p(x, y) \implies \forall x, y p(x, y)$ .
- f)  $\forall x (p(x) \vee q(x)) \implies \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ ,