WdM - Lista 6 (5 IV 2018)

Zad. 1 Wyznacz zbiory $\bigcup_{n\in I} A_n$ oraz $\bigcap_{n\in I} A_n$, jeżeli

a) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{N}$,

b) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{Z}$,

c) $A_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

d) $A_n = [2 + \frac{(-1)^n}{n}, 4 - \frac{(-1)^n}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

e) $A_n = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq n \cdot y\}$, $I = \mathbb{N}$.

Wskazówka: naszkicuj najpierw A_n dla paru wybranych n.

Zad. 2 Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right)$$

a następnie

$$\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right).$$

Zad. 3 Wykaż, że dla każdych rodzin zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ zachodzi

a) $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$,

b) $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$,

c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}$,

d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}$.

Wskazówka: posłuż się definicją i odpowiednim prawem rachunku kwantyfikatorów.

Pokaż, że nie zawsze zachodzi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

Zad. 4 (*) Załóżmy, że $k > n$ i danych jest k różnych niepustych podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Pokaż, że istnieją dwa rozłączne niepuste zbiory indeksów I, $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ takie, że

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Zad. 5 (*) Pokaż, że jeżeli $A_0 \supseteq A_1, \supseteq \ldots$ i $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots$, to

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$