

---

**WdM - Lista 7** (ćwiczenia 12 IV 2018)

---

**Ćw. 1** Które z poniższych funkcji są poprawnie określone? Które z nich są różnowartościowe, a które „na”? Które z nich są równe?

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2,$
- b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2,$
- c)  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2,$
- d)  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = |x|^2,$
- e)  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2,$
- f)  $f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = x^2,$
- g)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = x^2,$
- h)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)(x + 2) - x + 2.$

**Ćw. 2** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem  $f(x) = \sin x + 1$ . Wyznacz  $f[[0, 3\pi/2]], f[\{0, \pi\}], f[\{2\}], f^{-1}[(1/2, \infty)], f^{-1}[(-1/2, 1/2)], f^{-1}[\{0\}].$

**Ćw. 3** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Wyznacz  $f[[0, 1]], f[(-2, -1)], f[\{0, 1\}], f^{-1}[(-\infty, 1]].$

**Ćw. 4** Niech  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Narysuj diagramy wybranych funkcji  $f: X \rightarrow X$  i  $g: X \rightarrow X$ .

- a) Narysuj diagram funkcji  $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g \circ g.$
- b) Jak wygląda diagram funkcji stałej?
- c) Jak wygląda diagram bijekcji?
- d) Spróbuj wymyślić przykład funkcji  $h$  takiej, że  $h \circ h$  nie jest stała, ale  $h \circ h \circ h$  już jest.

---

**Zad. 5** Pokaż, że jeśli funkcja  $f: X \rightarrow Y$  jest bijekcją, a  $g: Y \rightarrow X$  jest funkcją do niej odwrotną, to

$$f^{-1}[A] = g[A]$$

dla każdego  $A \subseteq Y$ .

**Zad. 6** Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na”.

- a)  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n, k) = n + k.$
- b)  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g(n) = \langle 2n, -2n \rangle.$
- c)  $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}, g(A) = \min A.$

Wyznacz obrazy tych funkcji. Dla każdej z funkcji znajdź nieskończony podzbiór dziedziny, na którym funkcja jest różnowartościowa.

Wyznacz  $f[\{0, 1, 2\} \times \{-2, 0\}], f^{-1}[\{2\}], g[\{0, 2, 4\}], g^{-1}[\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}], h[\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})], h^{-1}[\{3\}]$  (o ile to możliwe).

**Zad. 7** Określamy funkcję  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Naszkiuj wykres  $f \circ f$ . Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem  $f$  i  $f \circ f$  zbiorów  $[0, 1)$  i  $[-1, 0)$ .

**Zad. 8** Niech  $f: X \rightarrow Y$  i  $g: Y \rightarrow Z$ . Wykaż, że jeśli  $g \circ f$  jest różnowartościowa, a  $f$  jest “na”, to  $g$  jest różnowartościowa. (Wskazówka: narysuj diagramy funkcji  $f$  i  $g$ .)

**Zad. 9** Niech  $f: X \rightarrow Y$  i  $A \subseteq X$ . Pokaż, że  $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ . Podaj przykład, kiedy nie zachodzi równość.

**Zad. 10** Niech  $f: X \rightarrow X$ . Załóżmy, że dla każdego  $A \subseteq X$  zachodzi  $f[A] \subseteq A$ . Pokaż, że wtedy  $f(x) = x$  dla każdego  $x \in X$ .

**Zad. 11** Mamy dane funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zapisz symboliczne poniższe zdania.

- $f$  jest ograniczona z dołu.
- $f$  jest ograniczona.
- Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji  $f$  jest mniejsza od wartości funkcji  $g$ .
- Żadna wartość funkcji  $f$  nie jest miejscem zerowym funkcji  $g$ .
- Funkcja  $f$  jest niemalejąca na przedziale  $[0, 1]$ .

**Zad. 12** Niech  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A, B \subseteq Y$ . Udowodnij, że

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

**Zad. 13** Niech  $A$  będzie podzbiorem zbioru  $X$ . Funkcja  $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$  zadana jest wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

- Kiedy funkcja  $\chi_A$  jest “na”?
- Pokaż, że  $\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$ .
- Pokaż, że  $\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$ .