Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

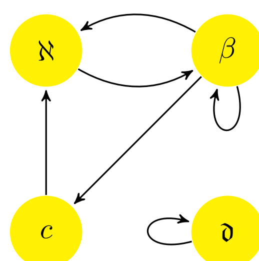
Zad. 1 (3) Zapisz symbolicznie poniższe zbiory (używając **np.** symboli „{", „}").

a) zbiór wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych.

b) rodzina podzbiorów liczb naturalnych, które zawierają co najmniej jedną liczbę parzystą.

c) zbiór punktów płaszczyzny o przynajmniej jednej współrzędnej naturalnej.

Zad. 2 (3) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{\aleph, \beta, c, \mathfrak{d}\}$ ma następujący diagram:



W każdym z poniższych podpunktów wyznacz zbiór tych $x \in X$, dla których poniższe zdania są prawdziwe:

a) $\forall y \forall z\ (x\mathsf{R}y \wedge y\mathsf{R}z \implies x\mathsf{R}z)$:

b) $\forall z \exists y\ (x\mathsf{R}y \implies z\mathsf{R}y)$:

c) $\{y \in X : x\mathsf{R}y\} \cap \{y \in X : y\mathsf{R}x\} \neq \emptyset$.

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 3 (3) Niech $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ będzie dana wzorem

$$f(A, r) = A \times \{r\}.$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f[\{\mathbb{Q}\} \times \mathbb{Q}]$.

Zad. 4 (3) Podaj przykład funkcji $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$, takich, że $g \circ f$ jest różnowartościowa, ale g różnowartościowa nie jest.

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 5 (3) Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ definiujemy relację częściowego porządku $\preceq$ wzorem

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle \iff (x \leq x' \wedge y \leq y').$$

- Czy $\preceq$ jest relacją liniowego porządku? Odpowiedź uzasadnij.

- Wyznacz elementy maksymalne i minimalne zbioru $\{\langle x, y\rangle \colon x^2 + y^2 = 1\}$.

Zad. 6 (3) Na zbiorze wszystkich ciągów rzeczywistych określamy relację $\preceq$ wzorem

$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n$$

- Podaj przykład dwóch elementów $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, które nie są porównywalne w sensie $\preceq$.

- Wyznacz kres górny $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 7 (3) Na zbiorze P wszystkich prostych na płaszczyźnie definiujemy relację równoważności:

$$p \sim r \iff \text{prosta } p \text{ jest równoległa do prostej } r.$$

- Opisz klasę abstrakcji prostej opisanej równaniem $y = 3$.

- Znajdź moc $P_{/\sim}$. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 8 (3) Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na $\mathbb{R}$. Rozważmy zbiór

$$S = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x \sim y\}.$$

- Wyznacz $\pi_{\mathbb{R}}[S]$.

- Wyznacz S_5.

- Udowodnij, że $\mathbb{R}/_{\sim} = \{S_x \colon x \in \mathbb{R}\}$.

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 9 (3) Znajdź moce zbiorów (bez uzasadnienia)

a) $\{A \subseteq \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n\ m \in A\}$.

b) $\{0\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

c) zbiór wszystkich **skończonych** podzbiorów liczb zespolonych.

Zad. 10 (3) Znajdź moc zbioru wszystkich macierzy 3×3 o wyznaczniku większym od 2020. Odpowiedź uzasadnij.