Część 1, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 (4) Mamy daną funkcję $f\colon X \to X$ i zbiory A, $B \subseteq X$. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, bez użycia symboli przeciwobrazu i obrazu, następujące funkcje zdaniowe:

- Funkcja f jest różnowartościowa.
- $f[A] \cap f[X \setminus A] = \emptyset$.
- $f^{-1}[A] = X$.
- Obcięcie funkcji f do zbioru A nie jest „na".

Zad. 2 (4) Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = |x|$. Dla każdego z poniższych podpunktów wskaż (dowolną) liczbę rzeczywistą r, dla której funkcja zdaniowa staje się zdaniem prawdziwym (lub zaznacz, że takiej nie ma).

- $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq r$.
- $\neg(\exists x \in \mathbb{R}\ x \neq r \wedge f(x) = f(r))$.
- $\exists x > 2\ (f(x) < r) \wedge \exists x < 10\ (f(r) < x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ f(x) = f(y) > r$.

Część 2, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 (1) Podaj definicję relacji równoważności na zbiorze M.

Zad. 4 (5) Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definiujemy relację równoważności $\sim$ w następujący sposób:

$$A \sim B \iff \pi_{\mathbb{R}}[A] = \pi_{\mathbb{R}}[B].$$

a) Wyznacz $[\emptyset]_\sim$.

b) Wyznacz $[\mathbb{R}^2]_\sim$.

c) Podaj funkcję $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, która świadczy o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności. Czy jest ona funkcją różnowartościową?

Zad. 5 (3) Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X. O elementach $x, y, a, b \in X$ wiemy, że $x \in [y]_\sim$ i $[a]_\sim = [b]_\sim$. Udowodnij, że

$$x \sim a \iff b \sim y.$$

Część 3, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 6 (5) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{R}^2, \preceq)$, gdzie

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

a) Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który ma cztery elementy i żadne dwa nie są porównywalne, ale wszystkie porównywalne są z $\langle 1, 1\rangle$.

$$A = \{ \quad , \quad , \quad , \quad \}.$$

b) Wyznacz wszystkie elementy minimalne i maksymalne zbioru $P = \{\langle x, y\rangle : y = x^2\}$. (Za zaznaczenie ich na wykresie 1 pkt. Za formalne zapisanie zbiorów 1 pkt.)

c) Czy istnieje $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ taki, że $P \cup \{\langle x, y\rangle\}$ ma element najmniejszy? Odpowiedź uzasadnij. (Tutaj P jest zbiorem z poprzedniego podpunktu.)

Zad. 7 (3) Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Udowodnij, że x jest elementem największym A wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalny w A i jest ograniczeniem górnym A.