
WdM - Lista 10 (ćwiczenia 15 I 2020)

Uwaga. Na ćwiczeniach 15 stycznia nie będzie kartkówki.

Zad. 1 Mamy daną bijekcję $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Używając f lub nie zapisz następujące bijekcje:

- $g: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$,
- $h: [3, 5] \rightarrow (0, \infty)$.

Zad. 2 Pokaż, że zbiory A i B są równoliczne.

- a) A - zbiór punktów dowolnej kuli w \mathbb{R}^3 , B - zbiór punktów dowolnego okręgu na płaszczyźnie;
- b) A - zbiór liczb pierwszych, B - zbiór liczb złożonych;
- c) A - zbiór liczb pierwszych, $B = \mathbb{Q} \cap (0, 5)$;
- d) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$;
- e) A - odcinek (e, π) , $B = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$;
- f) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $B = \mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$;
- g) A - zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- h) A - zbiór skończonych podzbiorów \mathbb{Q} , B - zbiór skończonych podzbiorów \mathbb{Z} .

Zad. 3 Pokaż, że istnieje bijekcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (0, 10)$.

Zad. 4 Pokaż, że zbiór $\{0, 1\}^A$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{P}(A)$ dla każdego zbioru A .

Zad. 5 Pokaż, że zbiór $\{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n f(2n) = 0\}$ jest równoliczny ze zbiorem $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zad. 6 Podaj przykład zbiorów A, B, C, D takich, że $|\mathbb{N}| < |A| < |B| < |C| < |D|$.

Zad. 7 Niech \sim będzie relacją równoważności na zbiorze X . Wykaż, że

$$|X/\sim| \leq |X|.$$

Zad. 8 Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi

$$|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|.$$

Wynioskuj stąd, że zbiór wszystkich ciągów liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.