

---

**WdM - Lista 11** (ćwiczenia 22 I 2020)

---

**Zad. 1** Określ moce poniższych zbiorów (jeśli moc jest skończona lub większa niż  $\mathfrak{c}$ , nie trzeba jej wyznaczać dokładnie). Niektóre z poniższych podpunktów wymagają doprecyzowania; przeprowadź w takim wypadku odpowiednią dyskusję. (Uwaga uspokajająca: zadanie na kartkówce nie będzie wymagało doprecyzowania).

- a) zbiór liczb zespolonych;
- b) zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych;
- c) zbiór  $A^{\mathbb{N}}$ , gdzie  $A$  jest zbiorem studentów, którzy zdadzą w tym semestrze WdM;
- d) zbiór prostych na płaszczyźnie;
- e) zbiór macierzy  $3 \times 3$ ;
- f) zbiór macierzy  $3 \times 3$  o niezerowym wyznaczniku;
- g) zbiór wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny;
- h) zbiór funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , będących funkcjami kwadratowymi;
- i) zbiór funkcji kwadratowych  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o współczynnikach całkowitych;
- j) zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych (wskazówka: uogólnij poprzedni podpunkt i użyj pewnego twierdzenia);
- k) zbiór liczb algebraicznych (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu);
- l) zbiór liczb rzeczywistych, które nie są algebraiczne (przy okazji: spróbuj podać przykład takiej liczby);
- m) zbiór wszystkich funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- n) zbiór wszystkich funkcji  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- o) zbiór wszystkich funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które są ciągłe (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu);
- p) zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych;
- q) zbiór wszystkich funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które są różniczkowalne;
- r) zbiór wszystkich możliwych słów w alfabecie polskim (słowo definiujemy jako skończony ciąg elementów z alfabetu);
- s) zbiór wszystkich możliwych ułożeń figur szachowych na szachownicy;
- t) zbiór wszystkich możliwych skończonych rozgrywek szachowych;
- u) zbiór wszystkich możliwych poprawnych kodów w języku Python;

v) zbiór wszystkich możliwych zadań z WdM.

**Zad. 2** Powiemy, że liczba rzeczywista  $r$  *da się zdefiniować*, jeśli istnieje jej definicja zapisana przy użyciu liter alfabetu polskiego, cyfr, symboli matematycznych i logicznych (przy czym definicja ta jest skończona). Czy istnieje liczba rzeczywista, której nie da się zdefiniować?

**Zad. 3** Wykaż, że  $\mathcal{P}(A)$  nigdy nie jest mocy  $\aleph_0$  (niezależnie od tego, czym jest zbiór  $A$ ).

**Zad. 4** Wyjaśnij błąd w następującym rozumowaniu: *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy  $\mathfrak{c}$ , ponieważ wiemy, że jest on nieprzeliczalny, a z drugiej strony nie może być mocy większej niż  $\mathfrak{c}$ .* (Uwaga: choć rozumowanie jest błędne, to zbiór liczb niewymiernych naprawdę jest mocy  $\mathfrak{c}$ ).