
WdM - Lista 3 (22 X 2019)

Uwaga. Ćwiczenia przeznaczone są do samodzielnego rozwiązania. Można o nie pytać na konwersatorium 21 października.

Ćw. 1 Spróbuj *przetłumaczyć* na język rachunku zbiorów różne prawa rachunku zdań (i inne tautologie).

Ćw. 2 Poćwicz mniej i bardziej formalne dowodzenie równości i inkluzji (np. różnych praw rachunku zbiorów).

Ćw. 3 Wypisz zbiory potęgowe paru różnych kilku-elementowych zbiorów (np. $\{1\}$ lub $\{\{1, 2\}, 3\}$).

Ćw. 4 Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

Ćw. 5 Podaj przykład nieskończonego zbioru A takiego, że $\emptyset \in A$ (lub wykaż, że taki nie istnieje).

Zad. 6 Wypisz elementy zbiorów A i B . Czy $A \subseteq B$? Czy $B \subseteq A$? Czy $A = B$? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy $A \in B$ lub $B \in A$?

- $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,
- $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$,
- $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 20\}$,
- $A = \emptyset$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x = 13\}$,

Zakładamy, że a , b i c nie są zbiorami.

Zad. 7 Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

- $\{b, c\} = \{b, c, d\}$,
- $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$,
- $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$,
- $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

W punktach a)–c) zakładamy, że a , b , c i d nie są zbiorami.

Zad. 8 Zbiory A , B , C są podzbiorem X . Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe. Zdefiniuj te zbiory przy użyciu \cup , \cap , itd.

- $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$,
- $x \in A \implies x \in B$,
- $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$.

Zad. 9 Zaznacz w sposób *losowy* kontur zbioru U na diagramie Venna zbiorów $A, B, C \subseteq X$. Następnie zapisz za pomocą operacji \cup, \cap i \setminus zbiór U . Napisz funkcję zdaniową φ taką, że $\varphi(x) \iff x \in U$ przy pomocy funkcji $x \in A, x \in B, x \in C, x \in X$.

Zad. 10 Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia:

- a) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
- b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
- c) $(C \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$.

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby. Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

Zad. 11 Dane są pewne zbiory A, B, C w przestrzeni X . Wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że

- a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
- b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
- c) $A \cap C = \emptyset$?

Odpowiedzi uzasadnij!

Zad. 12 Podaj przykład takiego zbioru A , że A i $\mathcal{P}(A)$ nie są rozłączne.

Zad. 13 Udowodnij

- a) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$,
- b) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.