WdM - Lista 4 (6 XI 2019)

Ćw. 1 Wypisz wszystkie elementy $\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{5\})$.

Ćw. 2 Produkt $A \times B$ jest 6-elementowy, a wśród jego elementów znajdują się $\langle 1,2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$ i $\langle 3,3\rangle$. Znajdź $B \times A$.

Ćw. 3 Naszkicuj w układzie współrzędnych $A \times B$ i $B \times A$, jeśli

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon (-1 \leq x < 1) \vee (2 < x \leq 3)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \colon (0 < x < 1) \vee (3 < x \leq 4)\}$,
b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$,
c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Zad. 4 Niech $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Zapisz $(A \times B)^c$ jako sumę iloczynów kartezjańskich.

Zad. 5 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory A i B, będące rozłącznymi podzbiorami $[0,1] \times [0,1]$ takimi, że

$$\pi_X[A] = \pi_X[B] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] = \pi^Y[A] = \pi^Y[B].$$

Zad. 6 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór A, który ma 5 elementów i taki, że $\pi_X[A]$ ma 2 elementy a $\pi^Y[A]$ jest zbiorem 3-elementowym.

Zad. 7 Zapisz funkcję zdaniową równoważną funkcji

$$\langle x,y\rangle \notin (A \cup B) \times (C \setminus D)$$

bez używania symboli mnogościowych ($\cup$, $\setminus$, $\times$, itd.)

Zad. 8 Załóżmy, że A, B, C i D są niepustymi zbiorami.

a) Czy z tego, że $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ wynika, że $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$?
b) Pokaż, że jeśli $A \times B = C \times D$, to $A = C$ i $B = D$.
c) Czy z tego, że $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$ wynika, że $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$?

Czy założenie niepustości jest potrzebne?

Zad. 9 Naszkicuj w układzie współrzędnych następujące zbiory.

a) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x = \sin y\}$,
b) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon -2 < x^2 + y^2 \leq 3\}$,
c) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon \sin x + \cos y > \pi\}$,
d) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon$ istnieje t takie, że $x \cdot t = y\}$,
e) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x + 2 = y \vee 4x = 3y\}$,
f) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x < |y| \implies y = 4x\}$,
g) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x < |y| \iff y = 4x\}$,

Zad. 10 Zauważmy, że każdy wektor (geometryczny) na płaszczyźnie można przedstawić jako parę uporządkowaną $\langle P, Q\rangle$, gdzie $P \in \mathbb{R}^2$ jest punktem zaczepienia wektora, a $Q \in \mathbb{R}^2$ jego końcem. Rozważmy zbiór wszystkich wektorów $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ o długości 1. Naszkicuj w układzie współrzędnych cięcie S_P zbioru S w punkcie P, gdzie P jest ustalonym (przez Ciebie) elementem płaszczyzny. Podobnie, naszkicuj zbiór $\pi_{\mathbb{R}^2}[S]$.

Zad. 11 Zdefiniujmy $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ w następujący sposób

$$\langle n, N\rangle \in A \iff n \in N.$$

Znajdź rzuty A. Opisz A_0, $A^{\emptyset}$, $A^{\{1\}}$.

Zad. 12 (*) Jaką cechę ma wykres zbioru $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ w układzie współrzędnych, jeśli wiemy, że dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi $A_x = A^x$?

Zad. 13 (*) O zbiorze $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ wiemy, że $A_x = [0, \sqrt{x}]$ dla każdego $x \in [0,1]$. Podaj A^y dla $y \in [0,1]$.