
WdM - Lista 5 (ćwiczenia 20 XI 2019)

Ćw. 1 Zapisz przy pomocy kwantyfikatorów, używając odpowiednich oznaczeń:

- a) Każdy student, który przyszedł na egzamin, jest przygotowany. (Przykładowe oznaczenia: S - zbiór studentów, $e(x)$ - x przyszedł na egzamin, $p(x)$ - x jest przygotowany.)
- b) Na egzamin przyszli tylko przygotowani studenci.
- c) Żaden student, który przyszedł na egzamin, nie był przygotowany.
- d) Na egzamin przyszedł student.
- e) W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszka przynajmniej jedna osoba. (Przykładowe oznaczenia: M - zbiór mieszkań w tym bloku, O - zbiór osób, $m(x, y)$ - x mieszka w y .)
- f) W pewnym mieszkaniu w tym bloku nikt nie mieszka.
- g) Każdy człowiek zna człowieka, który nie zna człowieka, który nikogo nie zna. (Przykładowe oznaczenia: L - zbiór ludzi, $z(x, y)$ - x zna y .)

Ćw. 2 Określ zasięg kwantyfikatorów, znajdź zmienne wolne. Które formuły są zdaniami? Które są zdaniami formalnymi?

- a) $\forall x (x > 3) \implies y < 5$,
- b) $\forall x \forall y (x > 3 \implies y < 5) \implies \forall x (x \neq 7)$,
- c) $\forall x \forall y (\varphi(x, y) \implies \varphi(x, z))$,
- d) $\exists x \exists y (x \neq y \vee z \leq 0)$,
- e) $\forall x (x + y = z)$,
- f) $\forall x \forall y (\varphi(x, y)) \implies \forall x \forall z \psi(z, x)$,
- g) $\forall x (x + y = z) \implies \exists z (\exists y (x - y \neq z \wedge \forall z (x \cdot y \geq z)))$

Zad. 3 Zapisz poniższe funkcje zdaniowe symbolicznie. Które z nich są zdaniami? O ciągach zakładamy, że są ciągami liczb rzeczywistych, a o funkcji f , że jej dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- a) Istnieje liczba naturalna nieparzysta.
- b) Liczba x przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- c) Istnieje liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- d) Jeśli liczby rzeczywiste x i y są różne, to $x < y$ lub $y < x$.
- e) Liczba z jest rozwiązaniem równania $x^3 - x^2 + 1 = 0$.
- f) Żaden element zbioru A , który nie jest elementem zbioru B , nie jest rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$.
- g) Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. (Nie używaj tu symboli \mathbb{Q} i $\mathbb{I}\mathbb{Q}$.)
- h) Każdy zbiór A ma nadzbiór.
- i) Zbiór A ma co najmniej dwa elementy.
- j) Zbiór A ma co najwyżej trzy elementy.
- k) Zbiór A ma dokładnie dwa elementy.

- l) Ciąg $(a_n)_n$ jest rosnący.
- m) Ciąg $(a_n)_n$ ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
- n) Od pewnego miejsca wyrazy ciągu $(a_n)_n$ są dodatnie.
- o) Ciąg $(a_n)_n$ ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.
- p) Funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.
- q) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.
- r) Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zad. 4 Zapisz poniższe zdania i funkcje zdaniowe prozą, w języku potocznym.

- a) $\forall x x \notin A$,
- b) $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in A n \leq x$,
- c) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} n < m$,
- d) $\forall A (A \neq \emptyset \implies \exists B (B \subseteq A \wedge \exists x x \in B))$,
- e) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y = y$,
- f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y = 0$,
- g) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0)$,
- h) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0 \wedge x \neq y)$,
- i) $\exists n \in \mathbb{N} (\exists k \in \mathbb{N} (n = 2k + 1) \wedge \exists k \in \mathbb{N} (n = 3k))$.

Zad. 5 Podaj konkretne funkcje zdaniowe świadczące o tym, że poniższe zdania formalne nie są tautologiami rachunku kwantyfikatorów. Postaraj się znaleźć parę przykładów, szukając zarówno bezpośrednio funkcji zdaniowych (np. o zakresie liczb naturalnych lub rzeczywistych), jak i rysując najpierw odpowiednie wykresy i diagramy funkcji zdaniowych (patrz wykład).

- a) $\exists x, y \varphi(x, y) \implies \exists x \forall y \varphi(x, y)$,
- b) $\exists x, y \varphi(x, y) \implies \exists x \varphi(x, x)$,
- c) $\forall y \exists x \varphi(x, y) \implies \forall x \varphi(x, x)$,
- d) $\forall x \varphi(x, x) \implies \forall x \forall y \varphi(x, y)$,
- e) $\exists x \forall y \varphi(x, y) \implies \forall x, y \varphi(x, y)$.
- f) $\forall x (\varphi(x) \vee \psi(x)) \implies \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)$,