WdM - Lista 8 (ćwiczenia 11 XII 2019)

Ćw. 1 Zbiór X składa się z 2 kwiatków czerwonych, 3 niebieskich i jednego kwiatka czarnego. Rozważmy na X relację

$$x \sim y \iff x \text{ i } y \text{ są tego samego koloru.}$$

a) Podaj funkcję świadczącą o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.
b) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?
c) Niech $A \subseteq X$. Zapisz symbolicznie, używając symbolu "$\sim$", zdanie "W zbiorze A nie ma dwóch kwiatków tego samego koloru".

Ćw. 2 Podaj przykład paru podziałów zbioru $\mathbb{R}$. Dla każdego podziału podaj relację równoważności, której zbiór ilorazowy jest równy temu podziałowi.

Ćw. 3 Sprawdź, że relacje równoważności podane na wykładzie są w istocie zwrotne, symetryczne i przechodnie.

Zad. 4 Rozważmy relację równoważności na $\mathbb{R}$ zdefiniowaną przez

$$x \sim y \iff \sin x = \sin y.$$

a) Wyznacz $[0]_\sim$.
b) Wyznacz $[1]_\sim$, a następnie sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz ten zbiór jeszcze raz, tym razem poprawnie.
c) Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 5 Na $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$ definiujemy relację $\sim$ w następujący sposób:

$$\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle \iff x \cdot y' = y \cdot x'.$$

- Znajdź $[\langle 2, 1\rangle]_\sim$.
- Wyznacz $X_{/\sim}$.
- Znajdź funkcję świadczącą o tym, że relacja $\sim$ jest relacja równoważności.

Zad. 6 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2$. Na zbiorze $\mathbb{R}$ zdefiniowano relację $\sim$ w następujący sposób:

$$x \sim y \iff f^{-1}[\{x\}] \text{ i } f^{-1}[\{y\}] \text{ mają tyle samo elementów.}$$

a) Podaj funkcję, która świadczy o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.
b) Wyznacz $[0]_\sim$, $[-1]_\sim$ i $[1]_\sim$.
c) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?

Zad. 7 Podaj przykład relacji równoważności na zbiorze $\{0,1,2,3,4,5\}$, która ma 3 klasy abstrakcji, w tym jedną, która ma 3 elementy.

Zad. 8 Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze $\{0,1,2\}$?

Zad. 9 Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujmy relację $\sim$ poprzez

$$A \sim B \iff A \cap \{0,1,2\} = B \cap \{0,1,2\}$$

a) Wyznacz $[\emptyset]_\sim$.
b) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_\sim$?

Zad. 10 Na zbiorze $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (a więc zbiorze wszystkich ciągów liczb rzeczywistych) zdefiniujmy relację $\sim$ poprzez

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

a) Sprawdź, że ta relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.
b) Wyznacz $[(a_n)]_\sim$, gdzie (a_n) jest ciągiem stale równym 0.
c) Czy każdy element zbioru ilorazowego $\mathbb{R}^\mathbb{N}/_\sim$ zawiera jakiś ciąg zbieżny?

Zad. 11 Na zbiorze Φ wszystkich formuł logicznych o zmiennych p i q definiujemy relację $\sim$ poprzez

$$\varphi \sim \psi \iff \varphi \text{ jest równoważna } \psi.$$

- Wyznacz klasę abstrakcji formuły $p \vee \neg p \vee q$.
- Ile elementów ma $\Phi_{/\sim}$? Co to pytanie ma wspólnego z pytaniem: "ile jest formuł logicznych o dwóch zmiennych z dokładnością do równoważności"?
- Napisz funkcję $f\colon \Phi \to \{0,1\}^8$ świadczącą o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.