
WdM - Lista 9 (ćwiczenia 8 I 2020)

Uwaga. Ostatnie dwie kartkówki odbędą się na ćwiczeniach **8 stycznia** i **22 stycznia**.

Zad. 1 Zapisz nieskończone rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{3}{4}$, a następnie jej nieskończone rozwinięcie dwójkowe.

Zad. 2 Pokaż, że zbiór liczb wymiernych jest gęsty w liczbach rzeczywistych, tzn. dla każdego liczb rzeczywistych a, b takich, że $a < b$ znajdziemy $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $a < q < b$. W szczególności $\mathbb{Q} \cap (a, b) \neq \emptyset$ dla każdych $a < b$.

Zad. 3 Wskaż bijekcję między zbiorami $A \times B$ i $B \times A$.

Zad. 4 Wskaż bijekcje między zbiorami A i B .

- a) $A = \{0, 3\}$ i $B = \{1, 8\}$.
- b) A - zbiór liczb naturalnych parzystych, B - zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- c) A - zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, B - zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.

Zad. 5 Korzystając z tego, że $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ pokaż, że $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Zad. 6 Pokaż, że $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}|$ jeżeli

- a) \mathcal{A} jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych przedziałów na prostej.
- b) \mathcal{A} jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.

Wskazówka: użyj zadania 2.

Zad. 7 Wskaż bijekcje między zbiorami A i B .

- a) A - trójkąt na płaszczyźnie, B - trójkąt do niego podobny.
- b) $A = (0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$.
- c) $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, gdzie $a < b$ i $c < d$ są liczbami rzeczywistymi.
- d) A - zbiór punktów okręgu na płaszczyźnie bez jednego punktu, B - zbiór punktów na prostej $y = 0$.

W poniższych zadaniach można używać twierdzenia Cantora-Bernsteina.

Zad. 8 Pokaż, że zbiory $[0, 1] \cup [3, 4]$ i $(0, 1] \cup (3, 4)$ są równoliczne.

Zad. 9 Pokaż, że zbiór punktów dowolnego kwadratu i zbiorów punktów dowolnego trójkąta na płaszczyźnie są równoliczne.

Zad. 10 Pokaż, że każdy nieskończony podzbiór \mathbb{N} jest równoliczny z \mathbb{N} .

Zad. 11 Załóżmy, że $f: A \rightarrow B$ i $g: C \rightarrow D$ są bijekcjami. Wskaż bijekcję $F: A^C \rightarrow B^D$.