
Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (6) Mamy dany zbiory $A \subseteq \mathbb{R}$, $C \subseteq \mathbb{R}^2$, zbiór B , ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych, funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i liczbę naturalną n . Zapisz symbolicznie poniższe zdania i funkcje zdaniowe.

- a) Zbiór A jest elementem zbioru potęgowego zbioru B . [Zabronione symbole: „ \subseteq ”, „ \subset ”, „ \mathcal{P} ”.]

- b) Co najmniej dwa elementy zbioru A są liczbami naturalnymi. [Zabroniony jest symbol oznaczający moc zbioru.]

- c) Tylko skończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) należy do zbioru A .

- d) Liczba n daje resztę 2 w dzieleniu przez 3. [Zabronione są symbole podzielności i modulo.]

- e) Pewna naturalna liczba parzysta należy do przeciwobrazu $[0, 1]$ przez funkcję f .

- f) Funkcja f nie jest różnowartościowa.

- g) Zbiór A jest rozłączny z $\pi_{\mathbb{R}}[C]$. [Zabronione są symbole „ π ” i „ \emptyset ”.]

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 2 (4) Niech $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} [x, y] & \text{jeśli } x \leq y \\ [y, x] & \text{jeśli } x > y. \end{cases}$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Niech $D = \{1\} \times \mathbb{R}$. Wyznacz $f[D]$.

d) Wyznacz $f^{-1}[\{\mathbb{N}\}]$.

Zad. 3 (2) Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $\operatorname{tg}(x) > 0$ używając symbolu „ \cap ”.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 6 (3) Na zbiorze liczb całkowitych \mathbb{Z} określamy relację równoważności \sim wzorem

$$k \sim l \iff \exists n \in \mathbb{Z} (k - l) = 3n.$$

- Wyznacz $[0]_{\sim}$.

- Wyznacz $\mathbb{Z}/_{\sim}$.

Zad. 7 (3) Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ określamy następującą relację równoważności \sim :

$$A \sim B \iff A_3 = B_3.$$

(Tutaj C_x oznacza cięcie pionowe zbioru C w punkcie x .)

- Naszkicuj w układzie współrzędnych przykład niepustego zbioru należącego do $[\emptyset]_{\sim}$.

- Naszkicuj w układzie współrzędnych przykład zbioru, który nie jest elementem $[\emptyset]_{\sim}$.

- Czy zbiór ilorazowy tej relacji jest równoliczny z \mathbb{R} ? Odpowiedź uzasadnij.

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 8 (3) Jaka jest moc zbioru

$$F = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ jest ściśle rosnąca } \}?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 9 (3) Jaka jest moc zbioru wszystkich formuł logicznych o trzech zmiennych zdaniowych, które nie są tautologiami? Ile jest tych formuł z dokładnością do równoważności? Odpowiedzi uzasadnij.