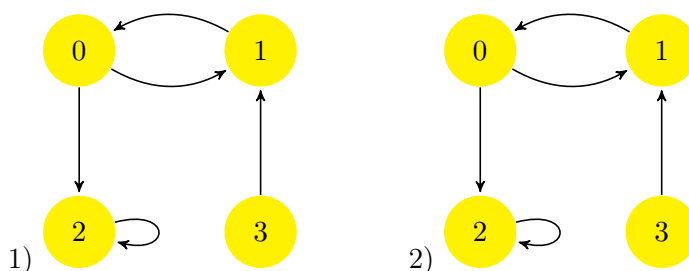

Część 1, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 (4) Mamy dany zbiór częściowo uporządkowany (X, \leq) , $a \in X$ oraz $A \subseteq X$.
Zapisz za pomocą kwantyfikatorów:
Element a jest kresem górnym zbioru A .

Element a jest porównywalny z pewnym elementem zbioru A .

Każdy element maksymalny zbioru A jest ograniczeniem górnym zbioru A .

Zad. 2 (5) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



a) Wyznacz zbiór $\{(x, y) : xRy\} \cap \{(x, y) : yRx\}$

b) Czy prawdziwe jest zdanie $\exists x \forall y (xRy \implies \exists z yRz)$? Uzasadnij!

c) Czy prawdziwe jest zdanie $\forall x \exists y (yRx \vee \exists z yRz)$? Uzasadnij!

d) Czy można dodać do powyższego diagramu strzałki tak, żeby R stała się relacją równoważności? Dodaj odpowiednie (na diagramie 1) lub uzasadnij, że nie można.

e) Czy można z powyższego diagramu usunąć strzałki tak, żeby R stała się funkcją o dziedzinie $\{0, 1, 2, 3\}$? Usuń odpowiednie (z diagramu 2) lub uzasadnij, że nie można.

Część 2, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 (4) Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności \sim w następujący sposób:

$$\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle \iff (x = x' \wedge y = y') \vee (x = y' \wedge y = x').$$

a) Wyznacz $[\langle 3, 4 \rangle]_{\sim}$.

b) Wyznacz zbiór ilorazowy relacji \sim .

c) Podaj funkcję $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, która świadczy o tym, że \sim jest relacją równoważności.

Zad. 4 (4) Niech $F: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie \mathcal{W} jest zbiorem wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych, będzie dana wzorem

$$F(f) = f(0).$$

• Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

• Znajdź $F[\{f \in \mathcal{W}: f \text{ jest wielomianem stopnia } 3\}]$.

Część 3, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 5 (4) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$.

a) Narysuj diagram Hassego tego porządku.

b) Czy każdy niepusty podzbiór tego zbioru ma kres dolny? Odpowiedź uzasadnij.

c) Czy każdy niepusty podzbiór tego zbioru ma element największy? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 6 (2) Podaj przykład zbioru częściowo uporządkowanego, który ma dokładnie 3 elementy maksymalne i dokładnie dwa elementy minimalne.

Zad. 7 (2) Niech \sim będzie relacją równoważności na zbiorze \mathbb{R} , o której wiemy, że nie jest ona relacją częściowego porządku. Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ dana wzorem $f(a) = [a]_{\sim}$ jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.