
WdM - Lista 10 (ćwiczenia 31 V 2019)

Zad. 1 Mamy daną bijekcję $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Używając f lub nie zapisz następujące bijekcje:

- $g: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$,
- $h: [3, 5] \rightarrow (0, \infty)$.

Zad. 2 Pokaż, że zbiory A i B są równoliczne. Staraj się raczej użyć twierdzeń z wykładu niż wskazywać bijekcję.

- a) $A = (1, 2) \cup (4, 17)$, $B = (1, \infty)$;
- b) A - zbiór punktów dowolnego kwadratu na płaszczyźnie, B - zbiór punktów dowolnego trójkąta na płaszczyźnie;
- c) A - zbiór punktów dowolnego rombu na płaszczyźnie, B - zbiór punktów dowolnego okręgu na płaszczyźnie;
- d) A - zbiór punktów dowolnego graniastosłupa w \mathbb{R}^3 , $B = (0, \frac{1}{10^9})$;
- e) A - zbiór liczb pierwszych, B - zbiór liczb złożonych;
- f) A - zbiór liczb pierwszych, $B = \mathbb{Q} \cap (0, 5)$;
- g) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$;
- h) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $B = \mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$.

Zad. 3 Pokaż, że istnieje bijekcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (0, 10)$.

Zad. 4 Pokaż, że zbiór $\{0, 1\}^A$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{P}(A)$ dla każdego zbioru A .

Zad. 5 Pokaż, że zbiór $\{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall n f(2n) = 0\}$ jest równoliczny ze zbiorem $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zad. 6 Podaj przykład zbiorów A, B, C, D takich, że $|\mathbb{N}| < |A| < |B| < |C| < |D|$.

Zad. 7 Niech \sim będzie relacją równoważności na zbiorze X . Wykaż, że

$$|X/\sim| \leq |X|.$$

Zad. 8 Pokaż, że jeżeli $A \sim B$ i $C \sim D$, to $A^C \sim B^D$. (Wskazówka: ustal bijekcje $f: A \rightarrow B$ i $g: D \rightarrow C$. Zdefiniuj $F: A^C \rightarrow B^D$ wzorem $F(h) = h'$, gdzie $h'(d) = f(h(g(d)))$ i zobacz, że to działa).