WdM - Lista 11 (ćwiczenia 7 VI 2019)

Zad. 1 Określ moce poniższych zbiorów (jeśli moc jest skończona lub większa niż $\mathfrak{c}$, nie trzeba jej wyznaczać dokładnie). Niektóre z poniższych podpunktów wymagają doprecyzowania; przeprowadź w takim wypadku odpowiednią dyskusję. (Uwaga uspokajająca: zadanie na kartkówce nie będzie wymagało doprecyzowania).

a) zbiór liczb zespolonych;

b) zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych;

c) zbiór $A^{\mathbb{N}}$, gdzie A jest zbiorem studentów WdM;

d) zbiór prostych na płaszczyźnie;

e) zbiór macierzy 3×3;

f) zbiór macierzy 3×3 o niezerowym wyznaczniku;

g) zbiór wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny;

h) zbiór funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będących funkcjami kwadratowymi;

i) zbiór funkcji kwadratowych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o współczynnikach całkowitych;

j) zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych (wskazówka: uogólnij poprzedni podpunkt i użyj pewnego twierdzenia);

k) zbiór liczb algebraicznych (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu);

l) zbiór liczb rzeczywistych, które nie są algebraiczne (przy okazji: spróbuj podać przykład takiej liczby);

m) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

n) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$;

o) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są ciągłe (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu);

p) zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych;

q) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są różniczkowalne;

r) zbiór wszystkich możliwych słów w alfabecie polskim (słowo definiujemy jako skończony ciąg elementów z alfabetu);

s) zbiór wszystkich możliwych ułożeń figur szachowych na szachownicy;

t) zbiór wszystkich możliwych skończonych rozgrywek szachowych;

u) zbiór wszystkich możliwych poprawnych kodów w języku Python;

v) zbiór wszystkich możliwych zadań z WdM.

Zad. 2 Wyjaśnij błąd w następującym rozumowaniu: *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy $\mathfrak{c}$, ponieważ wiemy, że jest on nieprzeliczalny, a z drugiej strony nie może być mocy większej niż $\mathfrak{c}$.* (Uwaga: choć rozumowanie jest błędne, to zbiór liczb niewymiernych naprawdę jest mocy $\mathfrak{c}$).

Zad. 3 Wykaż, że $\mathcal{P}(A)$ nigdy nie jest mocy $\aleph_0$ (niezależnie od tego, czym jest zbiór A).