**WdM - Lista 3** (15 III 2019)

**Uwaga.** *Ćwiczenia* przeznaczone są do samodzielnego rozwiązania. Można o nie pytać na konwersatorium 13 marca, ale raczej nie na ćwiczeniach 15 marca.

**Ćw. 1** Spróbuj *przetłumaczyć* na język rachunku zbiorów różne prawa rachunku zdań (i inne tautologie).

**Ćw. 2** Poćwicz mniej i bardziej formalne dowodzenie równości i inkluzji (np. różnych praw rachunku zbiorów).

**Ćw. 3** Wypisz zbiory potęgowe paru różnych kilku-elementowych zbiorów (np. $\{1\}$ lub $\{\{1,2\},3\}$).

**Ćw. 4** Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

**Ćw. 5** Podaj przykład nieskończonego zbioru $A$ takiego, że $\emptyset \in A$ (lub wykaż, że taki nie istnieje).

---

**Zad. 6** Wypisz elementy zbiorów $A$ i $B$. Czy $A \subseteq B$? Czy $B \subseteq A$? Czy $A = B$? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy $A \in B$ lub $B \in A$?

a) $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,
b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,
c) $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$,
d) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 \leq 20\}$,
e) $A = \emptyset$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 + x = 13\}$,

Zakładamy, że $a$, $b$ i $c$ nie są zbiorami.

**Zad. 7** Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$,
b) $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$,
c) $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$,
d) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

W punktach a)–c) zakładamy, że $a$, $b$, $c$ i $d$ nie są zbiorami.

**Zad. 8** Zbiory $A$, $B$, $C$ są podzbiorami $X$. Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe. Zdefiniuj te zbiory przy użyciu $\cup$, $\cap$, itd.

a) $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$,
b) $x \in A \implies x \in B$,
c) $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$.

**Zad. 9** Zaznacz w sposób *losowy* kontur zbioru $U$ na diagramie Venna zbiorów $A$, $B$, $C \subseteq X$. Następnie zapisz za pomocą operacji $\cup$, $\cap$ i $\setminus$ zbiór $U$. Napisz funkcję zdaniową $\varphi$ taką, że $\varphi(x) \iff x \in U$ przy pomocy funkcji $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$, $x \in X$.

**Zad. 10** Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia:

a) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
c) $(C \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$.

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby. Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

**Zad. 11** Dane są pewne zbiory $A$, $B$, $C$ w przestrzeni $X$. Wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że

a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$ ?
b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ ?
c) $A \cap C = \emptyset$ ?

Odpowiedzi uzasadnij!

**Zad. 12** Podaj przykład takiego zbioru $A$, że $A$ i $\mathcal{P}(A)$ nie są rozłączne.

**Zad. 13** Udowodnij

a) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$,
b) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.