WdM - Lista 6 (ćwiczenia 12 IV 2019)

Ćw. 1 Które z poniższych funkcji są poprawnie określone? Które z nich są różnowartościowe, a które "na"? Które z nich są równe?

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
b) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$,
c) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$,
d) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = |x|^2$,
e) $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
f) $f\colon [0, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2$,
g) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = x^2$,
h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+2) - x + 2$.

Ćw. 2 Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sin x + 1$. Wyznacz $f\big[[0, 3\pi/2]\big]$, $f[\{0, \pi\}]$, $f[\{2\}]$, $f^{-1}[(1/2, \infty)]$, $f^{-1}[(-1/2, 1/2)]$, $f^{-1}[\{0\}]$.

Ćw. 3 Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznacz $f\big[[0, 1]\big]$, $f[(-2, -1)]$, $f[\{0, 1\}]$, $f^{-1}[(-\infty, 1]]$.

Ćw. 4 Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Narysuj diagramy wybranych funkcji $f\colon X \to X$ i $g\colon X \to X$.

a) Narysuj diagram funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g \circ g$.
b) Jak wygląda diagram funkcji stałej?
c) Jak wygląda diagram bijekcji?
d) Spróbuj wymyślić przykład funkcji h takiej, że $h \circ h$ nie jest stała, ale $h \circ h \circ h$ już jest.

Zad. 5 Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na".

a) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n, k) = n + k$.
b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$.
c) $h\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$, $g(A) = \min A$.

Wyznacz obrazy tych funkcji. Dla każdej z funkcji znajdź nieskończony podzbiór dziedziny, na którym funkcja jest różnowartościowa.

Wyznacz $f[\{0, 1, 2\} \times \{0, 2\}]$, $f^{-1}[\{2\}]$, $g[\{0, 2, 4\}]$, $g^{-1}[\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}]$, $h[\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \setminus \{\emptyset\}]$, $h^{-1}[\{3\}]$.

Zad. 6 Określamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dla } x \geq 0, \\ -x-1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres $f \circ f$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem f i $f \circ f$ zbiorów $[0,1)$ i $[-1,0)$.

Zad. 7 Niech $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Wykaż, że jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa, a f jest „na", to g jest różnowartościowa. (Wskazówka: narysuj diagramy funkcji f i g.)

Zad. 8 Niech $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$. Pokaż, że $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Podaj przykład, kiedy nie zachodzi równość.

Zad. 9 Mamy dane funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisz symboliczne poniższe zdania.

a) f jest ograniczona z dołu.
b) f jest ograniczona.
c) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g.
d) Żadna wartość funkcji f nie jest miejscem zerowym funkcji g.
e) Funkcja f jest niemalejąca na przedziale $[0,1]$.

Zad. 10 Niech $f\colon X \to Y$, A, $B \subseteq Y$. Udowodnij, że

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

Zad. 11 Pokaż, że jeśli funkcja $f\colon X \to Y$ jest bijekcją, a $g\colon Y \to X$ jest funkcją do niej odwrotną, to

$$f^{-1}[A] = g[A]$$

dla każdego $A \subseteq Y$. (Tutaj symbol „$f^{-1}[A]$" oznacza przeciwobraz zbioru A.)

Zad. 12 Niech A będzie podzbiorem zbioru X. Funkcja $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ zadana jest wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

a) Kiedy funkcja χ_A jest "na"?
b) Pokaż, że $\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$.
c) Pokaż, że $\chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$.

Zad. 13 Niech $f\colon X \to X$. Załóżmy, że dla każdego $A \subseteq X$ zachodzi $f[A] \subseteq A$. Pokaż, że wtedy $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$.