WdM - Lista 7 (ćwiczenia 26 IV 2019)

Ćw. 1 Zbiór X składa się z 2 kwiatków czerwonych, 3 niebieskich i jednego kwiatka czarnego. Rozważmy na X relację

$$x \sim y \iff x \text{ i } y \text{ są tego samego koloru.}$$

a) Podaj funkcję świadczącą o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.
b) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?
c) Niech $A \subseteq X$. Zapisz symbolicznie, używając symbolu "$\sim$", zdanie "W zbiorze A nie ma dwóch kwiatków tego samego koloru".

Ćw. 2 Podaj przykład paru podziałów zbioru $\mathbb{R}$. Dla każdego podziału podaj relację równoważności, której zbiór ilorazowy jest równy temu podziałowi.

Ćw. 3 Sprawdź, że relacje równoważności podane na wykładzie są w istocie zwrotne, symetryczne i przechodnie.

Zad. 4 Rozważmy relację równoważności na $\mathbb{R}$ zdefiniowaną przez

$$x \sim y \iff \sin x = \sin y.$$

a) Wyznacz $[0]_\sim$.
b) Wyznacz $[1]_\sim$, a następnie sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz ten zbiór jeszcze raz, tym razem poprawnie.
c) Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 5 Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ zdefiniowano relację $\sim$ w następujący sposób:

$$\langle x_0, y_0 \rangle \sim \langle x_1, y_1 \rangle \iff \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

a) Podaj funkcję, która świadczy o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.
b) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór $[\langle 2, 1 \rangle]_\sim$,
c) Jaką mają postać inne klasy abstrakcji tej relacji?
d) Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 6 Podaj przykład relacji równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, która ma 3 klasy abstrakcji, w tym jedną, która ma 3 elementy.

Zad. 7 Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2\}$?

Zad. 8 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2$. Na zbiorze $\mathbb{R}$ zdefiniowano relację $\sim$ w następujący sposób:

$$x \sim y \iff f^{-1}[\{x\}] \text{ i } f^{-1}[\{y\}] \text{ mają tyle samo elementów.}$$

a) Podaj funkcję, która świadczy o tym, że $\sim$ jest relacją równoważności.
b) Wyznacz $[0]_\sim$, $[-1]_\sim$ i $[1]_\sim$.
c) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?

Zad. 9 Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujmy relację $\sim$ poprzez

$$A \sim B \iff A \cap \{0,1,2\} = B \cap \{0,1,2\}$$

a) Upewnij się, że jest to relacja równoważności.
b) Wyznacz $[\emptyset]_\sim$.
c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{N})/_\sim$?

Zad. 10 Na zbiorze $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (a więc zbiorze wszystkich ciągów liczb rzeczywistych) zdefiniujmy relację $\sim$ poprzez

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

a) Sprawdź, że ta relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.
b) Wyznacz $[(a_n)]_\sim$, gdzie (a_n) jest ciągiem stale równym 0.
c) Czy każdy element zbioru ilorazowego $\mathbb{R}^\mathbb{N}/_\sim$ zawiera jakiś ciąg zbieżny?

Zad. 11 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne dla $a, b \in X$:

a) $a \sim b$,

b) $a \in [b]_\sim$,

c) $[a]_\sim = [b]_\sim$.