
WdM - Lista 8 (ćwiczenia 10 V 2019)

Uwaga. Na ćwiczeniach 10 maja nie będzie kartkówki! Materiał z tej listy będzie natomiast obowiązywał na kolokwium 17 maja.

Ćw. 1 Sprawdź, które z omówionych na wykładzie własności ma pusta relacja na zbiorze niepustym. A pusta relacja na zbiorze pustym?

Ćw. 2 Narysuj diagram Hassego relacji $(X, |)$, gdzie $X = \{5, 6, 10, 12, 15, 17\}$ (a $n|m$ jest relacją podzielności). Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru X w częściowym porządku $(\mathbb{N}, |)$.

Ćw. 3 Narysuj diagram Hassego relacji $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, gdzie $X = \{0, 1, 2\}$. Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru $\mathcal{P}(X)$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Zad. 4 Zdefiniuj na podanych zbiorach 3 różne relacje częściowego porządku:

- a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- b) \mathbb{N} ,

Zad. 5 Zdefiniujmy częściowy porządek (\mathbb{R}^2, \preceq) poprzez

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

- a) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów porównywalnych z $\langle 1, 2 \rangle$.
- b) Wyznacz kres górny zbioru $\{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\}$.
- c) Naszkicuj zbiór D , który ma jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

Czy relacja na \mathbb{R}^2 zdefiniowana wzorem

$$\langle x, y \rangle \sqsubseteq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \geq y'$$

jest relacją częściowego porządku? Jeśli tak, to powtórz dla niej powyższe polecenia.

Powtórz powyższe polecenia dla relacji zdefiniowanej przez

$$\langle x, y \rangle \leq_{lex} \langle x', y' \rangle \iff (x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')).$$

Zad. 6 Narysuj diagram Hassego takiego częściowego porządku (X, \leq) , że

- a) X ma 7 elementów, w tym dwa elementy maksymalne i 3 minimalne,
- b) X ma 3 elementy i trzy dwuelementowe łańcuchy,
- c) X ma nieskończenie wiele elementów i dokładnie dwa elementy maksymalne, w tym jeden minimalny.

W każdym wypadku znajdź $X \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $(X, |)$ ma odpowiedni diagram Hassego.

Zad. 7 Niech (X, \leq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech $A, B \subseteq X$ i $a, b \in X$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania

- (X, \leq) jest liniowo uporządkowany,
- a jest ograniczeniem dolnym zbioru A ,
- a jest kresem dolnym zbioru A ,
- a jest elementem największym zbioru A ,
- A jest zbiorem elementów minimalnych B ,
- każdy element zbioru A ogranicza z dołu zbiór B ,
- a jest mniejsze od b i pomiędzy nimi istnieją co najmniej 2 różne elementy X .

Zapisz też negacje powyższych zdań, bez użycia symbolu negacji. Zamiast używać praw de Morgana, postaraj się raczej zrozumieć, co *znaczą* te zaprzeczenia.

Zad. 8 Rozważmy następującą relację częściowego porządku na ciągach liczb naturalnych $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

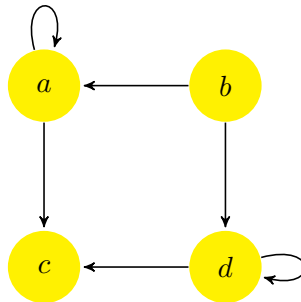
$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n \ a_n \leq b_n,$$

przy czym „ \leq ” jest standardowym porządkiem na liczbach naturalnych.

- Wyznacz zbiór elementów porównywalnych z (a_n) danym wzorem $a_n = n$.
- Czy $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq)$ ma element największy? Najmniejszy?

Zad. 9 Udowodnij, że w zbiorze liniowo uporządkowanym każdy skończony niepusty zbiór ma element największy i najmniejszy. Pokaż, że założenie skończoności jest istotne. Pokaż, że założenie liniowości jest istotne.

Zad. 10 Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



Czy ta relacja jest zwrotna? Przeciwzwrotna? Symetryczna? Antysymetryczna? Słabo-antysymetryczna? Przechodnia? Odpowiedzi uzasadnij.

Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania.

- $\exists y \exists z ((xRy) \wedge (xRz) \wedge (y \neq z))$:
- $\forall y (xRy \implies \neg yRx)$:
- $\forall y (yRy \implies \exists z zRy \wedge xRz)$:
- $\forall y (yRa \implies yRx)$: