1.1 (2) Zdefiniujmy spójnik dwuargumentowy $\pm$ tabelką logiczną

p	q	$p \pm q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sprawdź, czy formuła $(p \pm q) \pm r$ jest tautologią rachunku zdań.

1.2 (4) Mamy dany zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ i funkcję $f\colon A \to \mathbb{Z}$. Zapisz formalnie

a. żadna liczba parzysta nie należy do zbioru A,

b. zbiór A ma co najwyżej dwa elementy mniejsze od 10,

c. funkcja f nie jest różnowartościowa,

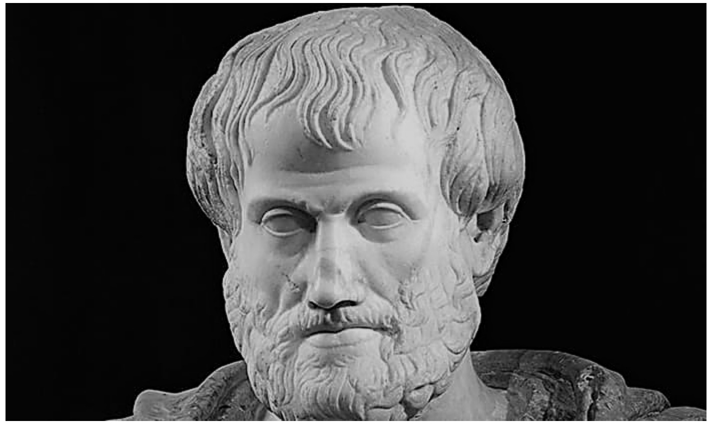
d. każda liczba ujemna jest wartością funkcji f.

2.1 (4) Zdefiniujmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x, y) = \langle -2y, 2x \rangle.$$

Czy f jest różnowartościowa? Czy f jest na? Podaj krótkie uzasadnienia. Wyznacz $f\Big[[0,2] \times \mathbb{R}\Big]$.

2.2 (2) Podaj przykład funkcji $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dla której $g^{-1}[[2,3)] = (2,3)$.



Rysunek 1: Egzaminu pilnuje Arystoteles (logik, etyk i metafizyk).

3.1 (4) Na zbiorze W wszystkich słów języka polskiego zdefiniowano relację wzorem

$$w \preceq v \iff w \text{ ma nie więcej liter niż } v.$$

a. Pokaż, że $\preceq$ nie jest relacją częściowego porządku na W.

b. Wskaż zbiór $A \subseteq W$ o pięciu elementach taki, że $(A, \preceq)$ jest częściowo uporządkowany. Czy ten porządek jest liniowy? Odpowiedź uzasadnij.

c. Niech $D = \{\langle w, v \rangle \in W \times W \colon (w \preceq v) \wedge \neg(v \preceq w)\}$. Wskaż przykład słowa należącego do D_w (cięcia pionowego D w w), gdzie w jest Twoim pierwszym imieniem (na potrzeby zadania zakładamy, że Twoje imię jest słowem języka polskiego).

3.2 (2) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leqslant)$ i $A \subseteq X$. Czy istnienie kresu górnego zbioru A jest warunkiem koniecznym istnienia elementu maksymalnego zbioru A? Odpowiedź uzasadnij.

Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem wszystkich prostokątów na płaszczyźnie. Definiujemy funkcję $f\colon \mathcal{P} \to [1, \infty)$ wzorem

$$f(P) = \frac{d_P}{k_P},$$

gdzie d_P, k_P są długościami boków P przy czym $d_P \geqslant k_P$.

4.1 (4) Na zbiorze $\mathcal{P}$ zdefiniujmy relację równoważności wzorem

$$P_1 \sim P_2 \iff f(P_1) = f(P_2).$$

a. Wyznacz $[K]_\sim$, gdzie $K = [0,1] \times [2,3]$.

b. Opisz $\mathcal{P}_{/\sim}$ i wyznacz jego moc.

c. Jaka jest moc klas abstrakcji relacji $\sim$? Odpowiedź uzasadnij.

4.2 (2) Podaj przykład relacji równoważności $\simeq$ na zbiorze $\mathcal{P}$ takiej, że $\mathcal{P}_{/\simeq}$ ma 3 elementy.

---

5 (6) Wyznacz moce poniższych zbiorów (za poprawną odpowiedź otrzymasz punkt, za poprawne uzasadnienie - kolejny punkt)

a. A - zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych,

b. B - zbiór wszystkich ciągów o wszystkich wyrazach wymiernych,

c. C - zbiór wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są ciągłe.