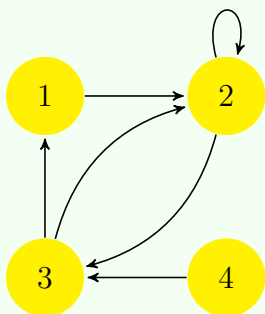


1.1. (2) Napisz formułę logiczną równoważną formu-
le

$$(p \wedge (q \vee \neg p)) \vee r$$

bez użycia spójników \wedge i \vee .

1.2. (4) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ma następujący diagram:

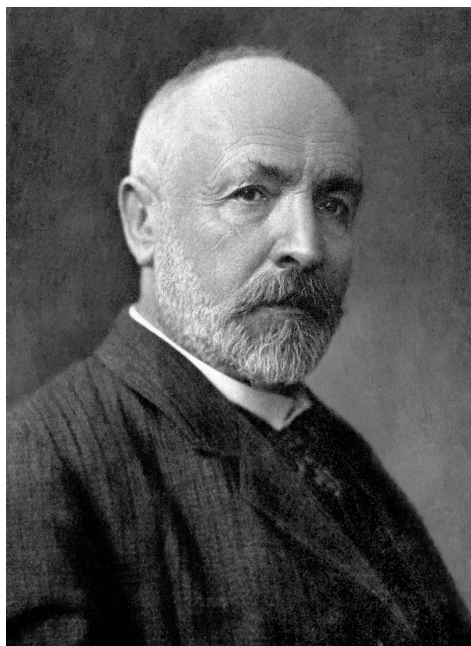


Wypisz elementy $x \in X$, dla których prawdziwe są następujące zdania (lub zaznacz, że ich nie ma):

- $\forall y ((xRy \wedge yRx) \implies x = y)$:
- $\exists y \exists z (xRy \wedge yRz \wedge zRx)$:
- $\exists y \exists k \in \mathbb{Z} (y = 2k \wedge xRy)$:
- $\forall y ((xRy) \iff x < y)$:

2.1. (4) Mamy dane funkcje $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$. O funkcji $g \circ f$ wiemy, że jest różnowartościowa, a o funkcji f , że jest na. Udowodnij, że g jest funkcją różnowartościową.

2.2. (2) Podaj przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest różnowartościowa, ale nie jest na. Podaj przykład funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest na, ale nie jest różnowartościowa.



Rysunek 1: Egzaminu pilnuje Georg Cantor.

3. (6) Niech $X = [0, 1) \cup [3, 7]$. Niech \mathcal{P} będzie rodziną wszystkich przedziałów domkniętych $[a, b]$ zawartych w X , dla których $a < b$.

- Uzasadnij, że relacja \subseteq jest częściowym porządkiem na \mathcal{P} .
- Czy relacja \subseteq jest liniowym porządkiem na \mathcal{P} ? Odpowiedź krótko uzasadnij.
- Wskaż w (\mathcal{P}, \subseteq) elementy minimalne i maksymalne (o ile istnieją), największy i najmniejszy (o ile istnieją).
- Wskaż w (\mathcal{P}, \subseteq) łańcuch mocy \mathfrak{c} .

4.1 (4) Niech \mathcal{T} będzie rodziną wszystkich trójkątów na płaszczyźnie. Na \mathcal{T} definiujemy następującą relację równoważności

$$T_1 \sim T_2 \iff T_1 \text{ i } T_2 \text{ mają równe pola.}$$

- Czy w każdej klasie abstrakcji relacji \sim znajdziemy trójkąt prostokątny? Odpowiedź uzasadnij.
- Jaka jest moc \mathcal{T}/\sim ? Odpowiedź uzasadnij.
- Jaka jest moc $[T]_\sim$, gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach w punktach $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 2, 1 \rangle$, $\langle 3, 0 \rangle$? Odpowiedź uzasadnij.

4.2 (2) Czy istnieje relacja równoważności \simeq na \mathbb{N} taka, że $\mathbb{N}/\simeq = \mathbb{N}$? Odpowiedź krótko uzasadnij.

5 (6) Wyznacz moce poniższych zbiorów (za poprawną odpowiedź otrzymasz punkt, za poprawne uzasadnienie - kolejny punkt)

- A - zbiór wszystkich ciągów o wyrazach zespolonych,
- B - zbiór wszystkich skończonych ciągów liter alfabetu polskiego,
- C - zbiór wszystkich liczb algebraicznych (czyli liczb będących pierwiastkami wielomianu o współczynnikach całkowitych).