KOLOKWIUM 2

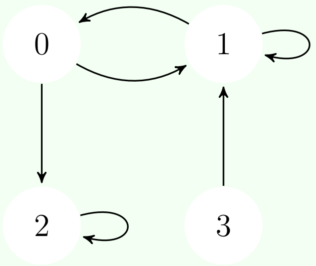
Zadanie 1 (3 pkt)
Mamy dany zbiór X, $x \in X$, $B \subseteq X$. Ustalamy również funkcję $f\colon X \to X$ i relację częściowego porządku $\leqslant$ na X. Zapisz formalnie, za pomocą kwantyfikatorów (nie używając symbolu podzielności „|”):

a) y jest pewną wartością funkcji f,

b) y nie jest porównywalny z żadnym elementem zbioru B,

c) Każda liczba naturalna podzielna przez 6 jest wielokrotnością 3.

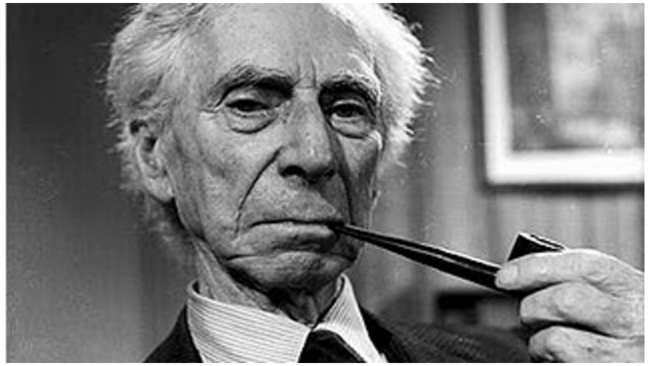
Zadanie 2 (3 pkt)
Relacja R na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



Czy relacja R jest a) zwrotna? b) słabo antysymetryczna? c) przechodnia? Odpowiedzi krótko uzasadnij.

Zadanie 3 (2 pkt) Naszkicuj w układzie współrzędnych przykład zbioru $D \subseteq [0,4] \times [0,4]$, dla którego prawdą jest, że

$$\forall x < 2 \left(x > 1 \iff \exists n \in \mathbb{Z}\ n > 2x \land \langle x, n\rangle \in D\right).$$



Rysunek 1: Kolokwium pilnuje Bertrand Russell.

Zadanie 4 (2 pkt)
Podaj przykład częściowego porządku $\preceq$ na $\mathbb{N}$, który nie jest liniowy, a w którym numer Twojego indeksu jest elementem największym.

Zadanie 5 (3 pkt)
Rozważmy na $\mathbb{R}^2$ częściowy porządek dany wzorem

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle \iff x \leqslant x' \land y \leqslant y'.$$

Niech $A = ([0,2) \times \{1\}) \cup ([1,3) \times \{0\})$. Wyznacz elementy maksymalne, minimalne, największe, najmniejsze oraz kresy górne i dolne zbioru A. (Wystarczy precyzyjny rysunek.)

Zadanie 6 (3 pkt)
Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leqslant)$. Udowodnij, że jeżeli istnieje w X element maksymalny, który nie jest największy, to $\leqslant$ nie jest porządkiem liniowym.

Zadanie 7 (4 pkt)
Niech F będzie zbiorem wszystkich formuł o zmiennych p i q i niech T będzie zbiorem wszystkich tautologii o zmiennych p i q. Rozważmy funkcję $g\colon F \times F \to F$ daną wzorem

$$g(\varphi, \psi) = \varphi \land \psi.$$

a) Czy funkcja g jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy funkcja g jest „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Znajdź $g^{-1}[T]$.

Zadanie 8 (3 pkt)
Dla $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy ciąg (A_n) wzorem

$$A_n = [(-1)^n, 1 + (-1)^n].$$

Wyznacz

a) $\displaystyle\bigcup_{n} \bigcap_{m>n} A_m$ oraz

b) $\displaystyle\bigcap_{n} \bigcup_{m>n} A_m$.

Zadanie 9 (2 pkt)
Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takich, że

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f \circ g(x) \neq g \circ f(x).$$
