# KOLOKWIUM 3

**Zadanie 1** (2 pkt)
Podaj przykład relacji równoważności $\sim$ na $\mathbb{N}$ takiej, że $\mathbb{N}_{/\sim}$ ma cztery elementy.

**Zadanie 2** (4 pkt)
Na $\mathbb{R}$ określamy relację równoważności $\sim$ wzorem

$$x \sim y \iff |x - y| \text{ jest liczbą naturalną.}$$

- Wyznacz $[3]_\sim$.
- Jaka jest moc $\mathbb{R}_{/\sim}$? Odpowiedź krótko uzasadnij.
- Podaj funkcję $f\colon \mathbb{R} \to [0,1)$ świadczącą o tym, że $\sim$ jest relacją równoważnośći.

**Zadanie 3** (3 pkt) Na $\mathbb{R}^2$ definiujemy relację równoważności $\sim$ wzorem

$$\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle \iff y = y'.$$

- Wyznacz klasę abstrakcji $\langle 1, 2\rangle$.
- Opisz $\mathbb{R}^2_{/\sim}$.

Rysunek 1: Kolokwium pilnują Albert Einstein i Kurt Gödel.

**Zadanie 4** (3 pkt)
Udowodnij, że jeżeli zbiór $A$ jest nieskończony, to istnieje funkcja $f\colon A \to A$, która jest różnowartościowa, ale nie jest „na". (Wskazówka: rozpatrz najpierw przypadek $A = \mathbb{N}$.)

**Zadanie 5** (3 pkt)
Pokaż, że zbiór wszystkich domkniętych przedziałów na prostej $\mathbb{R}$ o obydwu końcach wymiernych jest przeliczalny.

**Zadanie 6** (3 pkt)
Czy zbiory $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ są równoliczne? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 7** (8 pkt)
Określ moce poniższych zbiorów. Jeżeli moc jest większa niż moc zbioru liczb rzeczywistych, nie trzeba jej dokładnie wyznaczać. Nie musisz podawać uzasadnień.

1. $\{\langle n, r\rangle \colon n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}, n \leqslant r\}$;
2. zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{Q}$;
3. zbiór wszystkich funkcji ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb naturalnych;
4. zbiór wszystkich czworościanów w $\mathbb{R}^3$;
5. zbiór wszystkich prostokątów na płaszczyźnie o bokach wymiernej długości;
6. $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$;
7. zbiór wszystkich ciągów liczb całkowitych;
8. zbiór wszystkich różnowartościowych elementów $\{0, 1\}^\mathbb{N}$.