WdM - Lista 10 (ćwiczenia 14/18 I 2021)

Zad. 1 Wskaż bijekcję między zbiorami $A \times B$ i $B \times A$.

Zad. 2 Wskaż bijekcje między zbiorami A i B.

a) A - zbiór liczb naturalnych parzystych, B - zbiór liczb naturalnych nieparzystych.

b) A - zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, B - zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.

Zad. 3 Pokaż, że $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}|$ jeżeli

a) $\mathcal{A}$ jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych przedziałów na prostej.

b) $\mathcal{A}$ jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.

Wskazówka: użyj faktu, że każdy przedział zawiera liczbę wymierną.

Zad. 4 Pokaż, że zbiory A i B są równoliczne.

a) $A = [0, 1) \cup [3, 4]$, $B = (0, 1] \cup (3, 4)$;

b) A - zbiór punktów pewnego kwadratu na płaszczyźnie, B - zbiór punktów pewnego trójkąta na płaszczyźnie;

c) A - zbiór punktów dowolnej kuli w $\mathbb{R}^3$, B - zbiór punktów dowolnego okręgu na płaszczyźnie;

d) A - zbiór liczb pierwszych, B - zbiór liczb złożonych;

e) A - zbiór liczb pierwszych, $B = \mathbb{Q} \cap (0, 5)$;

f) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$;

g) A - odcinek (e, π), $B = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$;

h) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $B = \mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$;

i) A - zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

j) A - zbiór skończonych podzbiorów $\mathbb{Q}$, B - zbiór skończonych podzbiorów $\mathbb{Z}$.

Uwaga. W powyższym zadaniu można bez dowodu używać faktów (zostaną one udowodnione na wykładzie 13 stycznia, patrz też ostatnie zadanie):

- jeśli $|A| = |B|$, to $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$,
- jeśli $|A| = |B|$ i $|C| = |D|$, to $|A \times C| = |B \times D|$,
- jeśli $|A| = |B|$ i $|C| = |D|$, to $|A^C| = |B^D|$.

Zad. 5 Pokaż, że istnieje bijekcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus (0, 10)$.

Zad. 6 Pokaż, że każdy nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

Zad. 7 Pokaż, że zbiór $\{0, 1\}^A$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{P}(A)$ dla każdego zbioru A.

Zad. 8 Pokaż, że zbiór $\{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \colon \forall n \; f(2n) = 0\}$ jest równoliczny ze zbiorem $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zad. 9 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X. Wykaż, że

$$|X/_{\sim}| \leq |X|.$$

Zad. 10 Załóżmy, że $f \colon A \to B$ i $g \colon C \to D$ są bijekcjami. Wskaż bijekcję $F \colon A^C \to B^D$.