
WdM - Lista 11 (ćwiczenia 21/25 I 2021)

Zad. 1 Podaj przykład zbiorów A, B, C, D takich, że $|\mathbb{N}| < |A| < |B| < |C| < |D|$.

Zad. 2 Określ moce poniższych zbiorów (jeśli moc jest skończona lub większa niż \mathfrak{c} , nie trzeba jej wyznaczać dokładnie). Niektóre z poniższych podpunktów wymagają doprecyzowania; przeprowadź w takim wypadku odpowiednią dyskusję.

- a) zbiór liczb zespolonych;
- b) zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych;
- c) zbiór $A^{\mathbb{N}}$, gdzie A jest zbiorem studentów, którzy zdadzą w tym semestrze WdM;
- d) zbiór prostych na płaszczyźnie;
- e) zbiór macierzy 3×3 ;
- f) zbiór macierzy 3×3 o niezerowym wyznaczniku;
- g) zbiór wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny;
- h) zbiór funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, będących funkcjami kwadratowymi;
- i) zbiór funkcji kwadratowych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o współczynnikach całkowitych;
- j) zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych (wskazówka: uogólnij poprzedni podpunkt i użyj pewnego twierdzenia);
- k) zbiór liczb algebraicznych (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu);
- l) zbiór liczb rzeczywistych, które nie są algebraiczne (przy okazji: spróbuj podać przykład takiej liczby);
- m) zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- n) zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$;
- o) zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są ciągłe (wskazówka: użyj poprzedniego podpunktu);
- p) zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych;
- q) zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są różniczkowalne;
- r) zbiór wszystkich możliwych słów w alfabecie polskim (słowo definiujemy jako skończony ciąg elementów z alfabetu);
- s) zbiór wszystkich możliwych ułożeń figur szachowych na szachownicy;
- t) zbiór wszystkich możliwych skończonych rozgrywek szachowych;

- u) zbiór wszystkich możliwych poprawnych kodów w języku Python;
- v) zbiór wszystkich możliwych zadań z WdM.

Zad. 3 Powiemy, że liczba rzeczywista r *da się zdefiniować*, jeśli istnieje jej definicja zapisana przy użyciu liter alfabetu polskiego, cyfr, symboli matematycznych i logicznych (przy czym definicja ta jest skończona). Czy istnieje liczba rzeczywista, której nie da się zdefiniować?

Zad. 4 Wykaż, że $\mathcal{P}(A)$ nigdy nie jest mocy \aleph_0 (niezależnie od tego, czym jest zbiór A).

Zad. 5 Wyjaśnij błąd w następującym rozumowaniu: *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy \mathfrak{c} , ponieważ wiemy, że jest on nieprzeliczalny, a z drugiej strony nie może być mocy większej niż \mathfrak{c} .* (Uwaga: choć rozumowanie jest błędne, to zbiór liczb niewymiernych naprawdę jest mocy \mathfrak{c}).