WdM - Lista 6 (ćwiczenia 26/30 XI 2020)

Zad. 1 Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznacz $f\big[[0,1]\big]$, $f[(-2,-1)]$, $f[\{0,1\}]$, $f^{-1}[(-\infty, 1]]$.

Zad. 2 Niech $X = \{0,1,2,3,4,5\}$. Narysuj diagramy wybranych funkcji $f\colon X \to X$ i $g\colon X \to X$.

a) Narysuj diagram funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g \circ g$.
b) Jak wygląda diagram funkcji stałej?
c) Jak wygląda diagram bijekcji?
d) Spróbuj wymyślić przykład funkcji h takiej, że $h \circ h$ nie jest stała, ale $h \circ h \circ h$ już jest.

Zad. 3 Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na".

a) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n,k) = n + k$.
b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$.
c) $h\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$, $h(A) = \min A$.

Wyznacz obrazy tych funkcji. Dla każdej z funkcji znajdź nieskończony podzbiór dziedziny, na którym funkcja jest różnowartościowa.

Wyznacz $f[\{0,1,2\} \times \{0,2\}]$, $f^{-1}[\{2\}]$, $g[\{0,2,4\}]$, $g^{-1}[\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}]$, $h[\mathcal{P}(\{0,1,2\}) \setminus \{\emptyset\}]$, $h^{-1}[\{3\}]$.

Zad. 4 Określamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres $f \circ f$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem f i $f \circ f$ zbiorów $[0,1)$ i $[-1,0)$.

Zad. 5 Niech $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Wykaż, że jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa, a f jest „na", to g jest różnowartościowa. (Wskazówka: narysuj diagramy funkcji f i g.)

Zad. 6 Mamy dane funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisz symboliczne poniższe zdania.

a) f jest ograniczona z dołu.
b) f jest ograniczona.
c) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g.
d) Żadna wartość funkcji f nie jest miejscem zerowym funkcji g.
e) Funkcja f jest niemalejąca na przedziale $[0,1]$.

Zad. 7 Niech A będzie podzbiorem zbioru X. Funkcja $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ zadana jest wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

a) Kiedy funkcja χ_A jest "na"?
b) Pokaż, że $\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$.
c) Pokaż, że $\chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$.

Zad. 8 Niech $f\colon X \to Y$, A, $B \subseteq Y$. Udowodnij, że

$$f[A \cup B] \subseteq f[A] \cup f[B].$$

Zad. 9 Niech $f\colon X \to X$. Załóżmy, że dla każdego $A \subseteq X$ zachodzi $f[A] \subseteq A$. Pokaż, że wtedy $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$.

Zad. 10 Niech $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$. Pokaż, że $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Podaj przykład, kiedy nie zachodzi równość.