WdM - Lista 7 (ćwiczenia 3/7 XII 2020)

Zad. 1 Podaj przykład niepustej relacji R na zbiorze $\{0,1,2,3\}$ spełniającej poniższe własności lub wykaż, że takowa nie istnieje:

- R jest zwrotna, symetryczna i nieprzechodnia,
- R jest symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna,
- R jest symetryczna i słabo antysymetryczna.

Zad. 2 Rozważmy relacje na X zdefiniowane przez następujące funkcje zdaniowe. Jakie własności mają te relacje?

- $X=\mathbb{R}$, $\varphi(x,y)=$ „$x\leq y$”,
- $X=\mathbb{R}$, $\varphi(x,y)=$ „$x>y$”,
- $X=\mathcal{R}$, $\varphi(x,y)=$ „$x\neq y$”.
- $X=\mathbb{Z}$, $\varphi(n,k)=$ „$n\cdot k\geq 0$”,
- $X=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\varphi(A,B)=$ „$A\cap B\neq\emptyset$”,
- $X=\emptyset$, $\varphi(x,y)=$ „$x=x$”.

Zad. 3 Udowodnij, że

$$(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n)^c=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n^c$$

dla każdego ciągu zbiorów (A_n).

Zad. 4 Wyznacz zbiory $\bigcup_{n\in I}A_n$ oraz $\bigcap_{n\in I}A_n$, jeżeli

a) $A_n=(-\infty,n)$, $I=\mathbb{N}$,
b) $A_n=(-\infty,n)$, $I=\mathbb{Z}$,
c) $A_n=(\frac{n-1}{n},\frac{2n-1}{n})$, $I=\mathbb{N}\setminus\{0\}$,
d) $A_n=[2+\frac{(-1)^n}{n},4-\frac{(-1)^n}{n})$, $I=\mathbb{N}\setminus\{0\}$,
e) $A_n=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\colon y>1/nx\}$, $I=\mathbb{N}\setminus\{0\}$,
f) $A_n=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\colon y\geq 1/nx\}$, $I=\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Wskazówka: naszkicuj najpierw A_n dla paru wybranych n.

Zad. 5 Niech $A_n=(\frac{1}{n+1},1+\frac{1}{n+1})$. Wyznacz zbiory

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n,\ \bigcap_{n=0}^{\infty}A_n,\ \bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n,\ \bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}A_n.$$

Zad. 6 Pokaż, że nie dla wszystkich rodzin $\{A_{n,k}\colon n,k\in\mathbb{N}\}$ zachodzą inkluzje między zbiorami

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{\infty}A_{n,k}\ \text{oraz}\ \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n,k}.$$