
Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

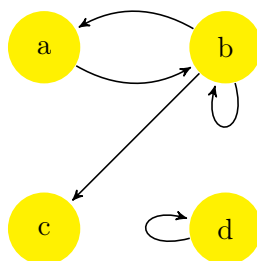
Zad. 1 (3) Załóżmy, że A i B są ustalonymi podzbiórami \mathbb{N} . Zapisz symbolicznie, przy użyciu kwantyfikatorów (i bez użycia symboli \cap , \cup i oznaczenia na moc zbioru), poniższe funkcje zdaniowe:

- a) Zbiory A i B nie są rozłączne.

- b) Przynajmniej dwa elementy A należą do B .

- c) nieskończenie wiele liczb naturalnych nie należy do $A \cup B$.

Zad. 2 (3) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ ma następujący diagram:



W każdym z poniższych podpunktów wyznacz zbiór tych $x \in X$, dla których poniższe zdania są prawdziwe:

- a) $\exists z \exists y xRz \wedge xRy$:

- b) $\forall z (xRz \implies \exists y (zRy))$:

- c) $\{\langle y, z \rangle : yRx \wedge xRz\} \neq \emptyset$.

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 3 (4) Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Niech $f: \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(g) = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5).$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f[\{0, 1\}^A]$.

d) Wyznacz moc zbioru $f^{-1}[\mathbb{N}]$ (podaj uzasadnienie).

Zad. 4 (2) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będzie dane wzorem $f(x) = |\sin x|$, a $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = \sqrt{x}$. Wyznacz $g \circ f$ i $f \circ g$.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 7 (3) Na \mathbb{R}^2 wprowadzamy relację równoważności wzorem

$$\langle x_0, y_0 \rangle \sim \langle x_1, y_1 \rangle \iff [x_0] = [x_1] \wedge [y_0] = [y_1],$$

przy czym $[x]$ oznacza tu część całkowitą liczby x .

- Naszkicuj w układzie współrzędnych klasę abstrakcji $\langle 1, 2 \rangle$ względem tej relacji.

- Opisz \mathbb{R}^2/\sim .

Zad. 8 (1) Podaj definicję tautologii rachunku zdań.

Zad. 9 (2) Czy dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$(A \cap B) \cup (C \cap B) = C \setminus (A^c \cap B^c)?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 10 (2) Niech

$$A = \{N \subseteq \mathbb{N} : 2 \in N\}$$

i

$$B = \{N \subseteq \mathbb{N} : 2 \notin N\}$$

Wskaż bijekcję między A i B .

Zad. 11 (4) Ustal moce poniższych zbiorów (bez uzasadnień). Jeśli zbiór ma moc skończoną lub większą niż \mathfrak{c} , nie trzeba dokładnie określać jego mocy.

a) Zbiór trójkątów prostokątnych na płaszczyźnie.

b) Zbiór skończonych ciągów liczb rzeczywistych.

c) Zbiór macierzy 2×2 o wyrazach całkowitych.

d) Zbiór funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

e) Zbiór funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$.

f) Zbiór kwadratów liczb pierwszych.

g) Zbiór częściowych porządków na \mathbb{N} .

h) Zbiór liczb niewymiernych.