KOLOKWIUM 2

Zadanie 1 (4 pkt)
Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $A \subseteq \mathbb{R}$. Zapisz formalnie nie używając symboli: obrazu $(f[\cdot])$, przeciwobrazu $(f^{-1}[\cdot])$ oraz liczby elementów zbioru, poniższe informacje.

a) (a_n) jest ciągiem liczb naturalnych,

b) nieskończenie wiele wyrazów (a_n) jest ujemnych,

c) co najmniej dwa wyrazy (a_n) należą do zbioru A,

d) $f[A] \cap A \subseteq f^{-1}[A]$.

Zadanie 2 (3 pkt)
Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Narysuj diagram relacji R na zbiorze X spełniającej łącznie poniższe warunki:

- R nie jest zwrotna,
- R nie jest symetryczna,
- R nie jest przechodnia,
- $\forall x\ \exists y\ x\mathsf{R}y \implies y\mathsf{R}x$.

Zaznacz fragmenty diagramu świadczące o braku a) zwrotności, b) symetrii i c) przechodniości.

Zadanie 3 (3 pkt)
Podaj przykład zbioru $D \subseteq \mathbb{R}^2$, który nie jest sumą skończenie wielu iloczynów kartezjańskich. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Rysunek 1: Kolokwium pilnuje Kartezjusz.

Zadanie 4 (3 pkt) Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory

a) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon \forall t > 0\ x + t = y\}$,

b) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0 \implies y > 0\}$,

c) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon$ 2 dzieli część całkowitą $x\}$.

Zadanie 5 (4 pkt) Niech T będzie rodziną wszystkich trójkątów na płaszczyźnie i niech $F\colon T \to (0, \infty) \times (0, \infty)$ będzie funkcją zdefiniowaną przez

$$F(T) = \langle \text{obwód } T,\ \text{pole } T\rangle.$$

Czy F jest różnowartościowa? Czy jest „na”? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 6 (3 pkt) Udowodnij lub obal stwierdzenie: $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \times B)$ dla wszystkich zbiorów A, B.

Zadanie 7 (4 pkt)
Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. O funkcjach $f\colon X \to X$ oraz $g\colon X \to X$ wiemy, że $g \circ f$ jest funkcją „na”. Czy stąd możemy wnioskować, że

a) funkcja f jest „na“?

b) funkcja g jest „na”?

c) istnieje funkcja odwrotna do $g \circ f$?

Uzasadnij odpowiedzi.

Zadanie 8 (4 pkt)
Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, dla których tangens jest określony. Będziemy rozważać funkcję $\mathrm{tg}\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Wyznacz (i zapisz formalnie) D.

b) Wyznacz $\mathrm{tg}[\{0, 1\}]$.

c) Wyznacz $\mathrm{tg}^{-1}[(1, \infty)]$.

d) Podaj przykład takiego zbioru $E \subseteq D$, że $\mathrm{tg}\colon E \to \mathbb{R}$ jest bijekcją.

Zadanie 9 (2 pkt)
Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f\colon (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \ln(2x + 1).$$