KOLOKWIUM 3

Zadanie 1 (4 pkt)
Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany

$$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$$

($|$ jest relacją podzielności).

a) Podaj przykład ograniczenia górnego zbioru $\{1, 2, \ldots, 2022\}$, które nie jest kresem górnym.

b) Podaj przykład zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, który ma nieskończenie wiele elementów minimalnych i dokładnie 2 maksymalne.

Zadanie 2 (3 pkt) Podaj przykładu zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$, który spełnia obydwa poniższe warunki:

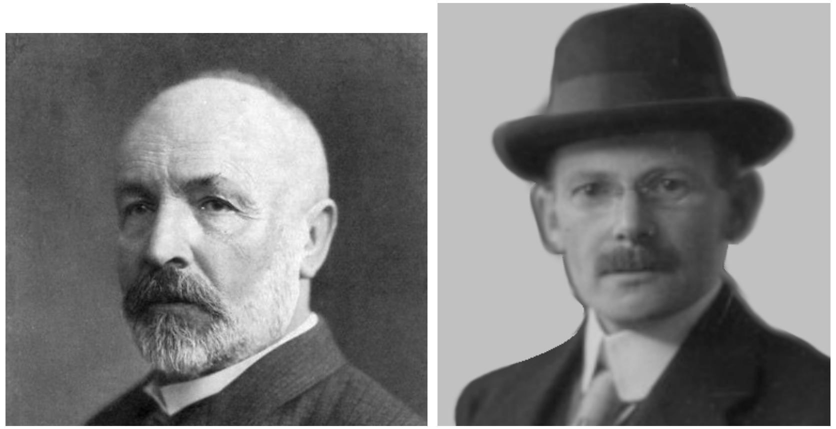
- $\exists x \; \forall y \; \neg(x < y)$
- $\exists x \; \forall y \; (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.

Zadanie 3 (3 pkt) Niech $\preceq$ będzie relacją częściowego porządku na $\mathbb{R}^2$ zdefiniowaną wzorem

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle \iff x \leqslant x' \wedge y \leqslant y'.$$

Naszkicuj w układzie współrzędnych **nieskończony** zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który spełnia łącznie poniższe warunki:

- $\langle 1, 2\rangle$ jest jego kresem górnym,
- $\langle 0, 0\rangle$ jest jego kresem dolnym,
- istnieje element maksymalny w A, różny od $\langle 1, 2\rangle$.



Rysunek 1: Kolokwium pilnują Cantor i Bernstein.

Zadanie 4 (3 pkt) Podaj przykład czteroelementowego podziału zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times (-1, 2]$.

Zadanie 5 (4 pkt) Zdefiniujmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

$$x \sim y \iff x^2 = y^2.$$

a) Wyznacz $[2]_\sim$.

b) Opisz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zadanie 6 (3 pkt) Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$. Uzasadnij, że $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. (Wskazówka: rozważ funkcję $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$, która przyporządkowuje relacji $\sim$ zbiór $[0]_\sim$).

Zadanie 7 (2 pkt) Wskaż bijekcję między zbiorem liczb całkowitych a zbiorem $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Zadanie 8 (5 pkt)
Znajdź moce poniższych zbiorów (wraz z uzasadnieniem!):

a) zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych mniejszych od 7,

b) $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$,

c) zbiór liczb zespolonych.

Zadanie 9 (3 pkt)
Podaj moce poniższych zbiorów (bez uzasadnienia!):

a) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$,

b) zbiór wszystkich okręgów na $\mathbb{R}^2$,

c) zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych.