

---

**WdM - Lista 3 (29 X 2021)**

---

**Zad. 1** Wybierz dwa prawa rachunku zbiorów i udowodnij je formalnie (postaraj się wybrać inne prawa niż te udowodnione na wykładzie).

**Zad. 2** Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

**Zad. 3** Podaj przykład nieskończonego zbioru  $A$  takiego, że  $\emptyset \in A$  (lub wykaż, że taki nie istnieje).

**Zad. 4** Podaj przykład takiego zbioru  $A$ , że istnieje  $x \in A$  taki, że  $x \in \mathcal{P}(A)$ .

**Zad. 5** Wypisz elementy zbiorów  $A$  i  $B$ . Czy  $A \subseteq B$ ? Czy  $B \subseteq A$ ? Czy  $A = B$ ? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy  $A \in B$  lub  $B \in A$ ?

- a)  $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,
- b)  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ,
- c)  $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ ,  $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$ ,
- d)  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 20\}$ ,
- e)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x = 13\}$ ,

Zakładamy, że  $a$ ,  $b$  i  $c$  nie są zbiorami.

**Zad. 6** Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

- a)  $\{b, c\} = \{b, c, d\}$ ,
- b)  $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$ ,
- c)  $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$ ,
- d)  $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$ .

W punktach a)–c) zakładamy, że  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  nie są zbiorami.

**Zad. 7** Zbiory  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są podzbiorem  $X$ . Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe. Zdefiniuj te zbiory przy użyciu  $\cup$ ,  $\cap$ , itd.

- a)  $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$ ,
- b)  $x \in A \implies x \in B$ ,
- c)  $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$ .

**Zad. 8** Zaznacz w sposób *losowy* kontur zbioru  $U$  na diagramie Venna zbiorów  $A$ ,  $B$ ,  $C \subseteq X$ . Następnie zapisz za pomocą operacji  $\cup$ ,  $\cap$  i  $\setminus$  zbiór  $U$ . Napisz funkcję zdaniową  $\varphi$  taką, że  $\varphi(x) \iff x \in U$  przy pomocy funkcji  $x \in A$ ,  $x \in B$ ,  $x \in C$ ,  $x \in X$ .

**Zad. 9** Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia:

- a)  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ,
- b)  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ,
- c)  $(C \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$ .

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby. Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

**Zad. 10** Dane są pewne zbiory  $A, B, C$  w przestrzeni  $X$ . Wiemy, że  $A \cap B = A \setminus C$ . Czy stąd wynika, że

- a)  $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$  ?
- b)  $A \cap B \cap C = \emptyset$  ?
- c)  $A \cap C = \emptyset$  ?

Odpowiedzi uzasadnij!

**Zad. 11** Udowodnij

- a)  $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$ ,
- b)  $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$ .

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.

**Zad. 12** *Różnicę symetryczną* definiujemy jako  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

- a) Pokaż, że różnica symetryczna jest łączna, tzn.  $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ . Wskazówka: zauważ, że  $x \in A \triangle B$  jest równoważne  $\neg(x \in A \iff x \in B)$ .
- b) Niech  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ ,  $C = \{1, 5\}$ . Znajdź zbiór  $X$ , dla którego zachodzi równość

$$(A \triangle X) \triangle B = C.$$