
WdM - Lista 6 (ćwiczenia 3 XII 2021)

Zad. 1 Mamy dane funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zapisz symboliczne poniższe zdania.

- a) f jest ograniczona z dołu.
- b) f jest ograniczona.
- c) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g .
- d) Żadna wartość funkcji f nie jest miejscem zerowym funkcji g .
- e) Funkcja f jest niemalejąca na przedziale $[0, 1]$.

Zad. 2 Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na”.

- a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n, k) = n + k$.
- b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$.
- c) $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(A) = \min A$.
- d) $\phi: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$.
- e) $\psi: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, $\psi(f) = f'$.

($C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{W} to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych).

Wyznacz obrazy tych funkcji. Dla każdej z funkcji znajdź nieskończony podzbiór dziedziny, na którym funkcja jest różnowartościowa.

Wyznacz $f[\{0, 1, 2\} \times \{0, 2\}]$, $f^{-1}[\{2\}]$, $g^{-1}[\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}]$, $h[\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \setminus \{\emptyset\}]$.

Zad. 3 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sin x$. Wyznacz

- $f[(0, \pi/2]]$,
- $f^{-1}[[\frac{1}{2}, \infty)]$.

Zad. 4 Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Narysuj diagramy wybranych funkcji $f: X \rightarrow X$ i $g: X \rightarrow X$.

- a) Narysuj diagram funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g \circ g$.
- b) Jak wygląda diagram funkcji stałej? Jak wygląda diagram identyczności? Bijekcji?
- c) Spróbuj wymyślić przykład funkcji h takiej, że $h \circ h$ nie jest stała, ale $h \circ h \circ h$ już jest.

Zad. 5 Określamy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Naszkiej wykres $f \circ f$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem f i $f \circ f$ zbiorów $[0, 1)$ i $[-1, 0)$.

Zad. 6 Niech $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$. Wykaż, że jeśli $g \circ f$ jest różnowartościowa, a f jest „na”, to g jest różnowartościowa. (Wskazówka: narysuj diagramy funkcji f i g .)

Zad. 7 Niech $f: X \rightarrow Y$. Udowodnij, że dla każdego $A \subseteq Y$

$$f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c.$$

Dla jakich funkcji zachodzi analogiczna równość dla obrazów?

Zad. 8 Niech $f: X \rightarrow Y$ i $A \subseteq X$. Pokaż, że $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Podaj przykład, kiedy nie zachodzi równość.

Zad. 9 Niech A będzie podzbiorem zbioru X . Funkcja $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ zadana jest wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$ dana wzorem $f(A) = \chi_A$ jest bijekcją.