WdM - Lista 7 (ćwiczenia 10 XII 2020)

Zad. 1 Podaj przykład niepustej relacji R na zbiorze $\{0,1,2,3\}$ spełniającej poniższe własności lub wykaż, że takowa nie istnieje:

- R jest zwrotna, symetryczna i nieprzechodnia,
- R jest symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna,
- R jest symetryczna i słabo antysymetryczna.

Zad. 2 Rozważmy relacje na X zdefiniowane przez następujące funkcje zdaniowe. Jakie własności mają te relacje?

- $X = \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) =$ „$x \leq y$”,
- $X = \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) =$ „$x \geq y$”,
- $X = \mathcal{R}$, $\varphi(x,y) =$ „$x \neq y$”.
- $X = \mathbb{Z}$, $\varphi(n,k) =$ „$n \cdot k \geq 0$”,
- $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\varphi(A,B) =$ „$A \cap B \neq \emptyset$”,
- $X =$ Zbiór studentów WdM, $\varphi(s,t) =$ „s lubi t”,
- $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\varphi(f,g) =$ „$\{n \in \mathbb{N} \colon f(n) > g(n)\}$ jest skończony”.

Zad. 3 Udowodnij, że

$$(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c$$

dla każdego ciągu zbiorów (A_n).

Zad. 4 Wyznacz zbiory $\bigcup_{n\in I} A_n$ oraz $\bigcap_{n\in I} A_n$, jeżeli

a) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{N}$,
b) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{Z}$,
c) $A_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
d) $A_n = [2 + \frac{(-1)^n}{n}, 4 - \frac{(-1)^n}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
e) $A_n = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \colon y > 1/nx\}$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
f) $A_n = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \colon y \geq 1/nx\}$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wskazówka: naszkicuj najpierw A_n dla paru wybranych n.

Zad. 5 Niech $A_n = (\frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1})$. Wyznacz zbiory

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Zad. 6 Pokaż, że nie dla wszystkich rodzin $\{A_{n,k} \colon n,k \in \mathbb{N}\}$ zachodzą inkluzje między zbiorami

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n,k} \text{ oraz } \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n,k}.$$