
WdM - Lista 8 (ćwiczenia 7 I 2022)

Zad. 1 Narysuj diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, gdzie $X = \{0, 1, 2\}$. Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru $\mathcal{P}(X)$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Zad. 2 Narysuj diagram Hassego takiego częściowego porządku (X, \leq) , że

- a) X ma 7 elementów, w tym dwa elementy maksymalne i 3 minimalne,
- b) X ma nieskończenie wiele elementów i dokładnie dwa elementy maksymalne, w tym jeden minimalny.

W każdym wypadku znajdź $X \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $(X, |)$ ma odpowiedni diagram Hassego.

Zad. 3 Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{N}, |)$. Ile jest elementów minimalnych, najmniejszych, maksymalnych i największych zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2022\}$?

Zad. 4 Zdefiniujmy częściowy porządek (\mathbb{R}^2, \leq) poprzez

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

- a) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów porównywalnych z $\langle 1, 2 \rangle$.
- b) Wyznacz kres górny zbioru $\{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\}$.
- c) Naszkicuj zbiór D , który ma jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

Zad. 5 Powtórz polecenia z poprzedniego zadania dla relacji zdefiniowanej przez

$$\langle x, y \rangle \leq_{lex} \langle x', y' \rangle \iff (x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')).$$

Zad. 6 Na zbiorze W słów języka polskiego zdefiniowano częściowy porządek \leq w następujący sposób: $w \leq v$, jeżeli w występuje (jako hasło) wcześniej niż v w słowniku języka polskiego¹.

- (a) Czy to jest porządek liniowy?
- (b) Co ten częściowy porządek ma wspólnego z porządkiem z poprzedniego zadania?
- (c) Spróbuj znaleźć elementy minimalne i maksymalne w zbiorze częściowo uporządkowanym (W, \leq) .

Zad. 7 Rozważmy (\mathbb{Q}, \leq) (gdzie \leq jest standardowym porządkiem). Wskaż $A \subseteq \mathbb{Q}$, który jest ograniczony z góry, ale nie ma kresu górnego.

¹Zakładamy, że nasz słownik zawiera wszystkie słowa języka polskiego.

Zad. 8 Niech (X, \leq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech $A, B \subseteq X$ i $a, b \in X$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania

- a) (X, \leq) jest liniowo uporządkowany,
- b) a jest ograniczeniem dolnym zbioru A ,
- c) a jest kresem dolnym zbioru A ,
- d) A jest zbiorem elementów minimalnych B ,
- e) każdy element zbioru A ogranicza z dołu zbiór B ,

Zapisz też negacje powyższych zdań, bez użycia symbolu negacji. Zamiast używać praw de Morgana, postaraj się raczej zrozumieć, co *znaczą* te zaprzeczenia.

Zad. 9 Rozważmy następującą relację częściowego porządku na ciągach liczb naturalnych $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n \ a_n \leq b_n,$$

przy czym „ \leq ” jest standardowym porządkiem na liczbach naturalnych.

- Wyznacz zbiór elementów porównywalnych z (a_n) danym wzorem $a_n = n$.
- Czy $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq)$ ma element największy? Najmniejszy?
- Niech $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie rodziną wszystkich ciągów różnowartościowych. Czy A jest zbiorem ograniczonym?