Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (3) Mamy daną funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$. Zapisz symbolicznie, przy użyciu kwantyfikatorów (i bez użycia symboli przeciwobrazu i oznaczenia na moc zbioru), poniższe funkcje zdaniowe:

a) Funkcja f jest różnowartościowa.

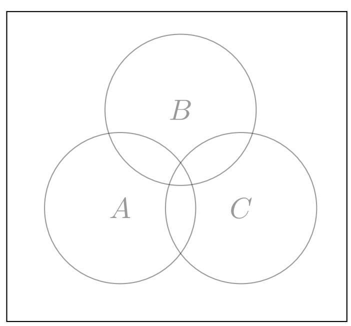
b) Każda liczba parzysta jest wartością funkcji f.

c) Funkcja f jest nieograniczona.

d) Przeciwobraz zbioru A jest nieskończony.

Zad. 2 (1,5) Zaznacz na diagramie Venna kontur zbioru

$$\{x \in X\colon (x \in A \land x \in B) \iff x \in C\}$$



Zad. 3 (1,5) Rozważmy zbiory D, E, F. Czy z faktu, że $D \cap E \subseteq F$ wynika, że

$$E \setminus (D \cap F) = \emptyset?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 4 (4) Niech A będzie zbiorem wszystkich **zbieżnych** ciągów liczb rzeczywistych. Rozważmy funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na"? Odpowiedź uzasadnij.

c) Niech B będzie zbiorem wszystkich zbieżnych ciągów o wyrazach w przedziale $(0, 1)$. Wyznacz $f[B]$.

d) O ciągu zbieżnym (a_n) wiemy, że $a_2 > 2023$. Czy stąd wynika, że $(a_n) \in f^{-1}[(1000, \infty)]$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 5 (2) Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+7} - 8.$$

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 6 (3) Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ definiujemy relację częściowego porządku wzorem:

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle x', y'\rangle \iff (x \leq x' \wedge y \leq y').$$

Niech A będzie wykresem funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = -2^x$. (Zwróć uwagę na dziedzinę funkcji f!)

a) Zaznacz w układzie współrzędnych elementy minimalne i maksymalne zbioru A.

b) Wyznacz kres górny i kres dolny zbioru A.

Zad. 7 (3) Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leq)$. Załóżmy, że $x \in X$ jest elementem największym.

a) Czy to oznacza, że x jest elementem maksymalnym? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy to oznacza, że x nie jest elementem minimalnym? Odpowiedź uzasadnij.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 8 (3) Na rodzinie niepustych i ograniczonych z góry podzbiorów $\mathbb{R}$ wprowadzamy następującą relację równoważności

$$A \sim B \iff \sup A = \sup B.$$

- Czy istnieje $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $|[A]_\sim| \leq \aleph_0$? Odpowiedź uzasadnij.

- Czy istnieją dwa rozłączne elementy zbioru $[(0,1)]_\sim$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 9 (2) Na zbiorze wszystkich słów języka polskiego wprowadzono relację równoważności:

$$w \sim z \iff w \text{ i } z \text{ zaczynają się tą samą literą.}$$

a) Ile różnych klas abstrakcji reprezentują słowa w tym zdaniu?

b) Czy zbiór ilorazowy relacji $\sim$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 10 (1) Podaj prawa de Morgana rachunku zbiorów.

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 11 (1) Podaj przykład zbioru nieprzeliczalnego $A \subseteq \mathbb{R}^2$, którego rzut $\pi_{\mathbb{R}}[A]$ jest przeliczalny.

Zad. 12 (2) Uzasadnij, że rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych nieparzystych jest równoliczna ze zbiorem wszystkich punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych niewymiernych.

Zad. 13 (3) Ustal moce poniższych zbiorów (bez uzasadnień). Jeśli zbiór ma moc skończoną lub większą niż $\mathfrak{c}$, nie trzeba dokładnie określać jego mocy. Jeśli opis może odpowiadać zbiorom o różnych mocach, należy podać wszystkie możliwości.

a) Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych stopnia co najmniej 5.

b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb pierwszych.

c) Zbiór wszystkich formuł logicznych o zmiennych p, q, r.

d) Zbiór wszystkich cięć pionowych zbioru $[0, 1] \times [0, 1]$.

e) Rodzina parami rozłącznych kół na płaszczyźnie.

f) Zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych stałych od pewnego miejsca.