Część 1, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 (4) Niech $a \in \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$. Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i $Y \subseteq X$. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów **nie używając symboli podzielności, mocy (liczby elementów) zbioru i nieskończoności**.

a) Liczba a nie jest podzielna przez 2023.

b) Zbiór A jest nieskończony.

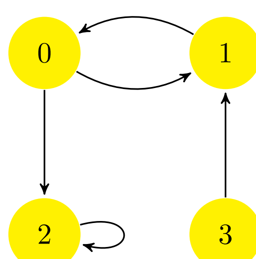
c) Pewne dwa elementy zbioru Y są nieporównywalne.

d) Zbiór Y ma element największy.

Zad. 2 (3) Narysuj diagram relacji R na zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$, która łącznie spełnia poniższe warunki:

- $0\mathsf{R}1$ i $2\mathsf{R}3$,
- relacja R nie jest zwrotna,
- relacja R jest przechodnia,
- $\exists x \in X\ \forall y \in X\ x\mathsf{R}y$.

Zad. 3 (3) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



Wyznacz zbiory:

a) $\{\langle x, y\rangle \in X \times X \colon \exists z \in X\ x\mathsf{R}z \wedge z\mathsf{R}y\} =$

b) $\{x \in X \colon \exists y \in X y\mathsf{R}x\} =$

Część 2, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 4 (4) Czy poniższe relacje są relacjami częściowego porządku? Czy są liniowymi porządkami? Odpowiedzi uzasadnij:

a) Niech $\preceq$ będzie relacją na zbiorze $C(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem
$$f \preceq g \iff f(0) \leq g(0).$$

b) Niech $\preceq$ będzie relacją na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów liczb naturalnych daną wzorem
$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n\ a_n \leq b_n.$$

Zad. 5 (4) Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Udowodnij, że X ma co najwyżej jeden element najmniejszy.

Zad. 6 (2) Podaj przykład zbioru częściowo uporządkowanego, który ma dokładnie dwa elementy maksymalne i dokładnie trzy elementy minimalne.

Część 3, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 7 (2) Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest różnowartościowa, ale nie jest „na".

Zad. 8 (6) Niech $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

a) Czy f jest funkcją „na"? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f[\mathbb{N} \times \{0\}]$.

d) Wyznacz $f^{-1}[\{5, 6, 7\}]$.

Zad. 9 (2) O zbiorze $A \subseteq [0, \infty)$ wiemy, że

$$x \in A \iff [x] \text{ jest parzyste}$$

(tutaj $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x). Naszkicuj zbiór A na osi liczbowej, a następnie zapisz go formalnie przy użyciu sumy uogólnionej.

BRUDNOPIS: