Wstęp do Matematyki - Lista 1 (13 X 2022)

Zad. 1 Oznaczając symbolem p zdanie *Ala je*, a symbolem q zdanie *As wyje* i używając spójników logicznych przedstaw poniższe zdania jako formuły logiczne:

a) Ala je pod warunkiem, że As wyje.
b) As nie wyje, zaś Ala nie je.
c) Ani Ala nie je, ani As nie wyje.
d) As wyje, o ile Ala nie je.
e) As wyje dokładnie wtedy, gdy Ala je.
f) Bądź Ala je, bądź As wyje.
g) Albo As wyje, albo Ala nie je.
h) Ala je tylko wtedy, gdy As wyje.
i) Ala je dokładnie wtedy, gdy As wyje.
j) Ala je, a As wyje.
k) Ala je, chyba że As wyje.
l) Ala wyje pomimo tego, że As je.
m) Ala je, no i As wyje.

Zad. 2 Stosując oznaczenia, jak w powyższym zadaniu, zapisz zdania reprezentowane przez poniższe formuły starając się nadać im możliwie potoczne brzmienie.

a) $p \implies q$,
b) $p \iff \neg q$,
c) $\neg(\neg q \wedge p)$,
d) $(p \implies q) \implies p$,
e) $p \wedge (p \implies q)$,
f) $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$.

Sprawdź, czy informacja, że p jest zdaniem fałszywym, wystarczy aby określić ich wartość logiczną. Jeśli tak, to wyznacz tę wartość, jeśli nie, to pokaż, że obie wartości są możliwe.

Zad. 3 Wykaż, że następujące formuły rachunku zdań są tautologiami:

a) $p \implies (q \implies p)$,
b) $p \vee \neg p$,
c) $p \implies (q \implies p \wedge q)$,
d) $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$,
e) $(\neg p \implies p) \implies p$,
f) $\neg p \implies (p \implies q)$,
g) $p \wedge q \implies p$,
h) $p \implies p \vee q$,
i) $\big(p \implies (q \implies r)\big) \implies \big((p \implies q) \implies (p \implies r)\big)$.

Zad. 4 Sprawdź, czy poniższe formuły są tautologiami. Traktuj tabelkę jako ostateczność, postaraj się najpierw zrozumieć daną formułę.

a) $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \implies q$,
b) $(p \implies q) \implies (p \wedge r \implies q)$,
c) $(p \implies q) \implies (p \implies q \vee r)$,
d) $p \implies (\neg p \vee q)$,
e) $\big((p \vee q) \wedge (p \implies q)\big) \implies (q \implies p)$,
f) $p \implies (\neg q \wedge q \implies r)$.

Zad. 5 Czy dla wszystkich liczb naturalnych n prawdziwe są następujące zdania?

a) Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to o ile n jest liczbą złożoną, to $n = 4$.
b) n jest podzielne przez 2 pod warunkiem, że n jest podzielne przez 5 i $5 < n < 15$.
c) n jest podzielne przez 3 dokładnie wtedy, gdy n jest podzielne przez 7.
d) To, że n jest liczbą pierwszą mniejszą od 6, jest warunkiem dostatecznym do tego, że n dzieli 30.
e) To, że n dzieli 30, jest warunkiem dostatecznym do tego, że n jest liczbą pierwszą mniejszą od 6.

Rozważ warianty zdań (d) i (e), w których "dostatecznym" jest zastąpione przez "koniecznym".

Zad. 6 Niech C oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważmy zdanie

Jeśli C jest trapezem, o ile jest rombem, to jeśli C jest trapezem, to jest kwadratem.

Zapisz powyższe jako formułę logiczną stosując oznaczenia: t: "C jest trapezem", r: "C jest rombem", k: "C jest kwadratem". Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od czworokąta C).

a) C jest trapezem,
b) C nie jest prostokątem,
c) C nie jest rombem, lecz jest trapezem.

Zad. 7 (*) Trzech braci: Prawdomówny, Kłamczuch i Niezdecydowany odpowiadają na pytania TAK lub NIE. Prawdomówny zawsze mówi prawdę, Kłamczuch zawsze kłamie, a Niezdecydowany czasem mówi prawdę, a czasem kłamie (i niekoniecznie robi to naprzemiennie). Musisz za pomocą trzech pytań określić, który z braci to który. Każde pytanie może być skierowane tylko do jednego z braci.