WdM - Lista 3 (27 X 2022)

Zad. 1 Wybierz dwa prawa rachunku zbiorów i udowodnij je formalnie (postaraj się wybrać inne prawa niż te udowodnione na wykładzie).

Zad. 2 Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

Zad. 3 Podaj przykład nieskończonego zbioru A takiego, że $\emptyset \in A$ (lub wykaż, że taki nie istnieje).

Zad. 4 Podaj przykład takiego zbioru A, że istnieje $x \in A$ taki, że $x \in \mathcal{P}(A)$.

Zad. 5 Wypisz elementy zbiorów A i B. Czy $A \subseteq B$? Czy $B \subseteq A$? Czy $A = B$? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy $A \in B$ lub $B \in A$?

a) $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,
b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,
c) $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$,
d) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 \leq 20\}$,
e) $A = \emptyset$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 + x = 13\}$,

Zakładamy, że a, b i c nie są zbiorami.

Zad. 6 Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$,
b) $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$,
c) $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$,
d) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

W punktach a)–c) zakładamy, że a, b, c i d nie są zbiorami.

Zad. 7 Zbiory A, B, C są podzbiorami X. Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe. Zdefiniuj te zbiory przy użyciu $\cup$, $\cap$, itd.

a) $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$,
b) $x \in A \implies x \in B$,
c) $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$.

Zad. 8 Zaznacz w sposób *losowy* kontur zbioru U na diagramie Venna zbiorów $A, B, C \subseteq X$. Następnie zapisz za pomocą operacji $\cup$, $\cap$ i $\setminus$ zbiór U. Napisz funkcję zdaniową φ taką, że $\varphi(x) \iff x \in U$ przy pomocy funkcji $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$, $x \in X$.

Zad. 9 Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia:

a) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
c) $(C \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$.

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby. Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

Zad. 10 Dane są pewne zbiory A, B, C w przestrzeni X. Wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że

a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
c) $A \cap C = \emptyset$?

Odpowiedzi uzasadnij!

Zad. 11 Udowodnij

a) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$,
b) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.