WdM - Lista 5 (ćwiczenia 24 XI 2022)

Zad. 1 Sprawdź, czy podane funkcje są różnowartościowe i „na”.

a) $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n,k)=n+k$.
b) $g\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $g(n)=\langle 2n,-2n\rangle$.
c) $h\colon \mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}\to\mathbb{N}$, $h(A)=\min A$.
d) $\phi\colon C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $\phi(f)=f(\frac{1}{2})$.
e) $\psi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathcal{W}$, $\psi(a,b)=ax^2+b$.

($C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{W}$ to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych).

Wyznacz obrazy tych funkcji (tzn. obrazy ich dziedzin). Dla każdej z funkcji znajdź nieskończony podzbiór dziedziny, na którym funkcja jest różnowartościowa.

Wyznacz $f[\{0,1,2\}\times\{0,2\}]$, $f^{-1}[\{2\}]$, $g^{-1}[\{0,1,2,3\}\times\{0,1,2,3\}]$, $h[\mathcal{P}(\{0,1,2\})\setminus\{\emptyset\}]$.

Zad. 2 Funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x)=x^2-3x+2$. Wyznacz $f\big[[0,1]\big]$, $f[(-2,-1)]$, $f[\{0,1\}]$, $f^{-1}[(-\infty,1]]$.

Zad. 3 Niech $X=\{0,1,2,3,4,5\}$. Narysuj diagramy wybranych funkcji $f\colon X\to X$ i $g\colon X\to X$.

a) Narysuj diagram funkcji $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g\circ g$.
b) Jak wygląda diagram funkcji stałej? Jak wygląda diagram identyczności? Bijekcji?
c) Spróbuj wymyślić przykład funkcji h takiej, że $h\circ h$ nie jest stała, ale $h\circ h\circ h$ już jest.

Przez *diagram* funkcji $h\colon A\to B$ rozumiemy rysunek zawierający zbiory A i B oraz strzałki obrazujące działanie funkcji h.

Zad. 4 Określamy funkcję $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{dla } x\geq 0,\\ -x-1 & \text{dla } x<0.\end{cases}$$

Naszkicuj wykres $f\circ f$. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy względem f i $f\circ f$ zbiorów $[0,1)$ i $[-1,0)$.

Zad. 5 Niech $f\colon X\to Y$ i $g\colon Y\to Z$. Wykaż, że jeśli $g\circ f$ jest różnowartościowa, a f jest „na”, to g jest różnowartościowa. (Wskazówka: narysuj diagramy funkcji f i g.)

Zad. 6 Niech $f\colon X \to Y$. Udowodnij, że dla każdego $A \subseteq Y$

$$f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c.$$

Dla jakich funkcji zachodzi analogiczna równość dla obrazów?

Zad. 7 Niech $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$. Pokaż, że $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Podaj przykład, kiedy nie zachodzi równość.

Zad. 8 Niech A będzie podzbiorem zbioru X. Funkcja $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ zadana jest wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja $f\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ dana wzorem $f(A) = \chi_A$ jest bijekcją.