
WdM - Lista 11 (ćwiczenia 8 I 2025)

Zad. 1 Wskaż bijekcję między zbiorami $A \times B$ i $B \times A$.

Zad. 2 Wskaż bijekcje między zbiorami A i B .

- a) A - zbiór liczb naturalnych parzystych, B - zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- b) A - zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, B - zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.

Zad. 3 Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ i że istnieje przekształcenie afiniczne z A na B , które ma niezerowy wyznacznik. Pokaż, że A i B są wtedy równoliczne. Podaj szereg różnych przykładów takich par zbiorów.

Zad. 4 Pokaż, że $|\mathbb{R}| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$.

Zad. 5 Pokaż, że każde dwa przedziały otwarte na $\mathbb{R}$ są równoliczne.

Zad. 6 Wywnioskuj z powyższych zadań, że odcinek $(0, 1)$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zad. 7 Niech A będzie zbiorem liczb wymiernych nieujemnych i niech $B = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, 3, \dots\}$.

- Pokaż, że $|B| \geq |A|$ wskazując odpowiednią funkcję.
- Pokaż, że $|B| \leq |\mathbb{N}|$ (patrz wykład o sztuce hotelarskiej).
- Pokaż, że $|B| \geq |\mathbb{N}|$ wskazując odpowiednią funkcję.
- Wywnioskuj, że $|B| = |\mathbb{N}|$.
- Wywnioskuj, że $|A| = |B|$, a zatem $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Pokaż, że $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Zad. 8 Pokaż, że zbiory A i B są równoliczne. Wskazówka: używaj twierdzenia Cantora-Bernsteina.

- a) $A = [0, 1)$, $B = [2, 20]$;
- b) $A = [0, 1)$, $B = \mathbb{R}$;
- c) A - zbiór punktów pewnego kwadratu na płaszczyźnie, B - zbiór punktów pewnego trójkąta na płaszczyźnie;
- d) A - zbiór liczb pierwszych, B - zbiór liczb złożonych;
- e) A - zbiór liczb pierwszych, $B = \mathbb{Q} \cap (0, 5)$;
- f) A - zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

Zad. 9 Pokaż, że $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}|$ jeżeli

- a) $\mathcal{A}$ jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych przedziałów na prostej.
- b) $\mathcal{A}$ jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.

Wskazówka: użyj faktu, że każdy przedział zawiera liczbę wymierną.

Zad. 10 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X . Wykaż, że

$$|X/\sim| \leq |X|.$$

Zad. 11 Pokaż, że każdy nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

Zad. 12 Pokaż, że zbiór $\{0, 1\}^A$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{P}(A)$ dla każdego zbioru A .