
WdM - Lista 8 (ćwiczenia 4 XII 2024)

Zad. 1 Rozważmy funkcje

- a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n, k) = n + k$.
- b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n) = \langle 2n, -2n \rangle$.
- c) $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(A) = \min A$.
- d) $\phi: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$.
- e) $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$, $\psi(a, b) = ax^2 + b$,
- f) $w: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{W}$, $w(A) =$ wielomian charakterystyczny A .

($C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{W}$ to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych). Wyznacz

- a) $f[\{0, 1, 2\} \times \{0, 2\}]$, $f^{-1}[\{2\}]$,
- b) $g^{-1}[\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}]$,
- c) $h[\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \setminus \{\emptyset\}]$,
- d) $\phi[K]$, gdzie K jest zbiorem wszystkich funkcji wielomianowych o współczynnikach rzeczywistych,
- e) $\psi^{-1}[L]$, gdzie L jest zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej 1,
- f) $w[D]$, gdzie D jest zbiorem macierzy diagonalnych.

Zad. 2 Wyznacz złożenia funkcji $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ w przypadkach, w których to możliwe:

- a) $f: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$, $g: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $g(A) = A^2$.
- b) $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(w) = w(1)$, $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, $g(w) = x \cdot w$.
- c) $f: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f(g) = g^{-1}[\{0\}]$, $g: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $g(A) = A \cup [0, 1]$.

($C(\mathbb{R})$ to zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{W}$ to zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych).

Które z tych funkcji są różnowartościowe, a które „na”?

Zad. 3 Podaj przykład funkcji $f: X \rightarrow Y$ i zbiorów $A, B \subseteq X$ takich, że

$$f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B].$$

Zad. 4 Rozważmy funkcję $f: X \rightarrow Y$ i $A \subseteq Y$. Naśladując rozumowania przeprowadzone na wykładzie, wykaż, że $f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$.

Zad. 5 Wykaż, że funkcja $g: X \rightarrow Y$ jest odwrotna do $f: Y \rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ g$ jest funkcją identycznościową.

Zad. 6 Zdefiniujmy $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ w następujący sposób

$$A = \{\langle k, X \rangle : k \in X\}.$$

Znajdź obraz zbioru A przez rzut $\pi_{\mathbb{N}}$ na pierwszą oś i obraz zbioru A przez rzut $\pi^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ na drugą oś.

Zad. 7 Niech $F: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych).

$$F((a_n)) = a_2.$$

- a) Czy funkcja F jest różnowartościowa?
- b) Znajdź $F[\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ jest zbieżny do } 0\}]$.