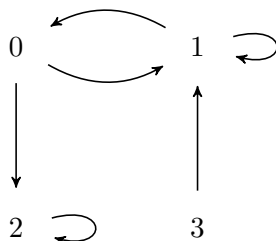

WdM - Lista 10 (ćwiczenia 17 XII 2025)

Zad. 1 Sprawdź, które z omówionych na wykładzie własności ma pusta relacja na zbiorze niepustym. A pusta relacja na zbiorze pustym?

Zad. 2 Relacja R na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



Czy relacja R jest a) zwrotna? b) słabo antysymetryczna? c) przechodnia? Odpowiedzi krótko uzasadnij.

Zad. 3 Naskicuj w układzie współrzędnych przykład zbioru $D \subseteq [0, 4] \times [0, 4]$, dla którego prawdą jest, że

$$\forall x < 2 \ (x > 1 \iff \exists n \in \mathbb{Z} \ n > 2x \wedge \langle x, n \rangle \in D).$$

Zad. 4 Niech F będzie zbiorem wszystkich formuł o zmiennych p i q i niech T będzie zbiorem wszystkich tautologii o zmiennych p i q . Rozważmy funkcję $g: F \times F \rightarrow F$ daną wzorem

$$g(\varphi, \psi) = \varphi \wedge \psi.$$

a) Czy funkcja g jest „na”?

b) Znajdź $g^{-1}[T]$.

Zad. 5 Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $A \subseteq \mathbb{R}$. Zapisz formalnie nie używając symboli: obrazu $(f[\cdot])$, przeciwoobrazu $(f^{-1}[\cdot])$ oraz liczby elementów zbioru, poniższe informacje.

- a) (a_n) jest ciągiem liczb naturalnych,
- b) nieskończenie wiele wyrazów (a_n) jest ujemnych,
- c) co najmniej dwa wyrazy (a_n) należą do zbioru A ,
- d) $f[A] \cap A \subseteq f^{-1}[A]$.

Zad. 6 Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich trójkątów na płaszczyźnie i niech $F: \mathcal{T} \rightarrow (0, \infty) \times (0, \infty)$ będzie funkcją zdefiniowaną przez

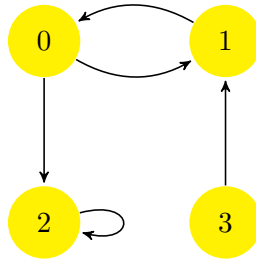
$$F(T) = \langle \text{obwód } T, \text{ pole } T \rangle.$$

Czy F jest różnowartościowa? Czy jest „na”? Odpowiedzi uzasadnij.

Zad. 7 Niech $a \in \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$. Niech R będzie pewną relacją na zbiorze $\mathbb{N}$, a $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funkcją. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów nie używając symboli podzielności, mocy (liczby elementów) zbioru i nieskończoności.

- a) Liczba a nie jest podzielna przez 2023.
- b) Zbiór A jest nieskończony.
- c) Żadne dwie liczby nieparzyste nie są w relacji R .
- d) Relacja R nie jest przechodnia.
- e) Żadna liczba parzysta, która jest w relacji R z liczbą nieparzystą, nie jest wartością funkcji f .
- f) Każda liczba naturalna jest w relacji R z pewną wartością funkcji f .
- g) Każde dwa elementy przeciwwobrazu A przez funkcję f są w relacji R z pewnym elementem obrazu A przez funkcję f .

Zad. 8 Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



Wyznacz zbiory:

- a) $\{\langle x, y \rangle \in X \times X : \exists z \in X \ xRz \wedge zRy\} =$
- b) $\{x \in X : \exists y \in X yRx\} =$

Zad. 9 Podaj przykład funkcji

$$f: \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow C(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\{1, 0, 2\}).$$

Zad. 10 Niech $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

- a) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.
- b) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.
- c) Wyznacz $f[\mathbb{N} \times \{0\}]$.
- d) Wyznacz $f^{-1}[\{5, 6, 7\}]$.