
WdM - Lista 12 (ćwiczenia 14 I 2026)

Zad. 1 Narysuj diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, gdzie $X = \{0, 1, 2\}$. Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru $\mathcal{P}(X)$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Zad. 2 Narysuj diagram Hassego takiego częściowego porządku $(X, \leq)$, że

- a) X ma 7 elementów, w tym dwa elementy maksymalne i 3 minimalne,
- b) X ma nieskończenie wiele elementów i dokładnie dwa elementy maksymalne, w tym jeden minimalny.

W każdym wypadku znajdź $X \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $(X, |)$ ma odpowiedni diagram Hassego. Jeśli nie da się wykonać tego polecenia, zmodyfikuj swój diagram.

Zad. 3 Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{N}, |)$. Ile jest elementów minimalnych, najmniejszych, maksymalnych i największych zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2026\}$?

Zad. 4 Zdefiniujmy częściowy porządek $(\mathbb{R}^2, \leq)$ poprzez

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

- a) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów porównywalnych z $\langle 1, 2 \rangle$.
- b) Wyznacz kres górny zbioru $\{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\}$, znajdź wszystkie jego elementy minimalne i maksymalne.
- c) Naszkicuj zbiór D , który ma jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

Zad. 5 Na zbiorze W słów języka polskiego zdefiniowano częściowy porządek $\leq$ w następujący sposób: $w \leq v$, jeżeli w występuje (jako hasło) nie później niż v w słowniku języka polskiego¹.

- (a) Czy to jest porządek liniowy?
- (b) Spróbuj znaleźć elementy minimalne i maksymalne w zbiorze częściowo uporządkowanym $(W, \leq)$.
- (c) Spróbuj znaleźć kresy zbioru słów, które zawierają litery „ż” i „b” (możesz też poeksperymentować z innymi warunkami).

Zad. 6 Rozważmy rodzinę $\mathcal{P}$ wszystkich przedziałów postaci (a, b) , $a < b$, częściowo uporządkowany przez $\subseteq$.

- (a) Czy jest to porządek liniowy?
- (b) Rozważmy rodzinę $\mathcal{A}$ tych przedziałów, które zawierają przedział $[0, 1]$. Czy $\mathcal{A}$ ma element najmniejszy? Maksymalny? Kres dolny?

¹Zakładamy, że nasz słownik zawiera wszystkie słowa języka polskiego.

Zad. 7 Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech $A, B \subseteq X$ i $a, b \in X$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania

- a) $(X, \leq)$ jest liniowo uporządkowany,
- b) a jest ograniczeniem dolnym zbioru A ,
- c) a jest kresem dolnym zbioru A ,
- d) A jest zbiorem elementów minimalnych B ,
- e) każdy element zbioru A ogranicza z dołu zbiór B ,

Zapisz też negacje powyższych zdań starając się zrozumieć, co *znaczą* te zaprzeczenia.