
WdM - Lista 11 (ćwiczenia 21 I 2026)

Zad. 1 Wskaż bijekcję między zbiorami $A \times B$ i $B \times A$.

Zad. 2 Wskaż bijekcje między zbiorami A i B .

- a) A - zbiór liczb naturalnych parzystych, B - zbiór liczb naturalnych nieparzystych.
- b) A - zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, B - zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez 3.

Zad. 3 Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ i że istnieje przekształcenie afiniczne z A na B , które ma niezerowy wyznacznik. Pokaż, że A i B są wtedy równoliczne. Podaj szereg różnych przykładów takich par zbiorów.

Zad. 4 Pokaż, że $|\mathbb{R}| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$.

Zad. 5 Pokaż, że każde dwa przedziały otwarte na $\mathbb{R}$ są równoliczne.

Zad. 6 Wywnioskuj z powyższych zadań, że odcinek $(0, 1)$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zad. 7 Pokaż, że zbiory A i B są równoliczne. Wskazówka: używaj twierdzenia Cantora-Bernsteina.

- a) $A = [0, 1)$, $B = [2, 20]$;
- b) $A = [0, 1)$, $B = \mathbb{R}$;
- c) A - zbiór punktów pewnego kwadratu na płaszczyźnie, B - zbiór punktów pewnego trójkąta na płaszczyźnie;
- d) A - zbiór liczb pierwszych, B - zbiór liczb złożonych;
- e) A - zbiór liczb pierwszych, $B = \mathbb{Q} \cap (0, 5)$;
- f) A - zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

Zad. 8 Wskaż, które z poniższych zbiorów są przeliczalne. Można używać faktu, że $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.

- a) zbiór liczb zespolonych,
- b) zbiór prostych na płaszczyźnie,
- c) zbiór macierzy 3×3 ,
- d) zbiór macierzy 3×3 o niezerowym wyznaczniku,
- e) zbiór wszystkich możliwych słów w alfabecie polskim (słowo definiujemy jako skończony ciąg elementów alfabetu),
- f) zbiór wszystkich możliwych ułożeń figur szachowych na szachownicy.

Zad. 9 Pokaż, że $\mathcal{A}$ jest przeliczalny, jeżeli

- a) $\mathcal{A}$ jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych przedziałów na prostej.
- b) $\mathcal{A}$ jest (dowolnym) zbiorem parami rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.

Wskazówka: użyj faktu, że każdy przedział zawiera liczbę wymierną.

Zad. 10 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze X . Wykaż, że

$$|X/\sim| \leq |X|.$$

Zad. 11 Pokaż, że każdy nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

Zad. 12 Pokaż, że zbiór $\{0, 1\}^A$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{P}(A)$ dla każdego zbioru A .