
WdM - Lista 14 (ćwiczenia 28 I 2026)

Zad. 1 Zbadaj, które z poniższych zbiorów są przeliczalne:

- a) Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych,
- b) Zbiór wszystkich sześciątów w $\mathbb{R}^3$ o długości boków będących liczbami naturalnymi,
- c) Maksymalna rodzina parami rozłącznych trójkątów na płaszczyźnie,
- d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o jednej współrzędnej wymiernej,
- e) Zbiór wszystkich skończonych ciągów zerojedynkowych,
- f) Zbiór wszystkich ciągów o wyrazach będących ciągami o wyrazach będących ciągami zerojedynkowymi,
- g) Zbiór wszystkich funkcji $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \log(ax)$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}$,
- h) $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{\sqrt{n+1}} : n \in \mathbb{N}\}$.

Zad. 2 Podaj przykład relacji równoważności, która ma nieprzeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji.

Zad. 3 Uzasadnij formalnie, że jeżeli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |C|$, to $|A| \leq |C|$. Podobnie, uzasadnij, że jeżeli $|A| = |B|$ i $|B| = |C|$, to $|A| = |C|$.

Zad. 4 Na zbiorze X ograniczonych z dołu i niepustych podzbiorów $\mathbb{R}$ definiujemy relację wzorem:

$$A \sim B \iff \inf A = \inf B.$$

Uzasadnij, że jest to relacja równoważności. Czy $[\mathbb{N}]_{\sim}$ jest zbiorem przeliczalnym? Ile elementów ma $X_{/\sim}$? Odpowiedzi uzasadnij.

Zad. 5 Podaj przykład czteroelementowego podziału zbioru $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times (-1, 2]$.

Zad. 6 Udowodnij, że jeżeli zbiór A jest nieskończony, to istnieje funkcja $f: A \rightarrow A$, która jest różnowartościowa, ale nie jest „na”. (Wskazówka: rozpatrz najpierw przypadek $A = \mathbb{N}$.)

Zad. 7 Czy zbiory $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ są równoliczne?

Zad. 8 Ile rozwiązań ma to zadanie? (W tym wypadku przez rozwiązanie rozumiemy skończony ciąg liter alfabetu polskiego, greckiego i hebrajskiego, cyfr, znaków interpunkcyjnych, symboli matematycznych i logicznych, który koduje odpowiedź wraz z uzasadnieniem.)